Regole di conteggio

	Task Description	Due Date	Status
☐	Il teorema fondamentale del conteggio e le principali regole di conteggio da esso derivate		
☐			
☐			
☐			
☐			
☐			
☐			
☐			
☐			
☐			

REGOLE DI CONTEGGIO

(1) TEOREMA FONDAMENTALE DEL CONTEGGIO

Consideriamo n esperimenti casuali, ciascuno dei quali può manifestarsi con K_i $(i=1,n)$ possibili risultati

Esperim. 1	Esp. 2	- - - -	Esp. n
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
K_1 possibili risultati	K_2 possibili risultati		K_n possibili risultati

Il numero totale di possibili risultati che si possono verificare considerando gli n esperimenti è:

$$K_1 \times K_2 \times K_3 \times \dots \times K_n = \prod_{i=1}^{n} K_i$$

Esempio. In una data gelateria è possibile scegliere tra due tipi di cono (tradizionale e croccante) e tre gusti (limone, fragola e pistacchio).

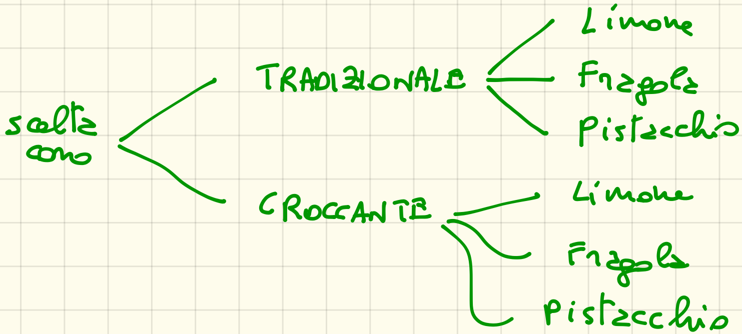
Quanti possibili tipi di gelato si possono comporre scegliendo un solo gusto?

$n = 2$

Esperimento 1 $\downarrow$ scelta cono $\downarrow$ $K_1 = 2$

Esperimento 2 $\downarrow$ scelta gusto $\downarrow$ $K_2 = 3$

$K_1 \times K_2 = 2 \times 3 = 6$ possibili tipi di gelato



Esempio ⇝ n. possibili targhe

L'ufficio della motorizzazione vuole conoscere quante possibili targhe si possono comporre usando 6 cifre, di cui le prime 3 costituite da lettere e le ultime 3 costituite da numeri

$n = 6$ cifre che compongono la targa

$K_1 = 26$	$K_2 = 26$	$K_3 = 26$	$K_4 = 9$ 10 se considero lo 0	$K_5 = 9$	$K_6 = 9$

$$\prod_{i=1}^{n} K_i = 26^3 \times 9^3$$

REGOLA 2

Se considero per n volte un dato esperimento che può manifestarsi con uno tra K possibili risultati, il numero di differenti risultati è:

$$K^n$$

Teorema fondamentale del conteggio

$$K_i = K \qquad \forall\, i = 1, n$$

$$\prod_{i=1}^{n} K_i = \prod_{i=1}^{n} K = \underbrace{K \cdot K \cdot \ldots \cdot K}_{n \text{ volte}} = K^n$$

es. lancio moneta per 3 volte $\rightarrow$ possibili triplette

$$2^3 = 8$$

I lancio	II lancio	III lancio
T	T	T
C	T	T
T	C	T
T	T	C
C	C	T
C	T	C
T	C	C
C	C	C

REGOLA 3 → n. possibili sequenze ordinate di n oggetti su n posti (disposizioni)

esempio → 10 libri (top ten della settimana) da disporre su 10 posti

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10!$$

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

NOTA: per definizione

$$0! = 1$$

REGOLA 4 → numero di possibili sequenze di n oggetti su K posti ($K < n$) (considerando l'ordine) (permutazioni)

esempio: 10 libri ma solo 3 posti in vetrina

$$\boxed{10} \times \boxed{9} \times \boxed{8}$$

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-K+1) = \frac{n!}{(n-K)!}$$

di solito calcolabile sulle calcolatrici scientifiche con il tasto $\boxed{{}_nP_r}$

REGOLA 5 → n. possibili sequenze di n oggetti su k posti $(k \leq n)$
(senza considerare l'ordine) (combinazioni)

la sequenza (x, y, z) è uguale alla
sequenza (x, z, y), (y, z, x), ...

10 libri → 3 posti in vetrina

$$\frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{\frac{10!}{(10-3)!}}{3!} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \binom{10}{3}$$ coefficiente binomiale

per evitare di contare più volte le sequenze con gli stessi oggetti divido per il n. di possibili sequenze con cui posso ordinare i 3 oggetti → $3 \times 2 \times 1 = 3!$
(vedi regola 3)

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \longrightarrow \boxed{{}_nC_x}$$

tasto calcolatrici scientifiche

lancio di una moneta per 3 volte

I lancio	II lancio	III lancio
T	T	T
C	T	T
T	C	T
T	T	C
C	C	T
C	T	C
T	C	C
C	C	C

$\binom{3}{0} = 1 \to$ [0 croci su 3 lanci]

$\binom{3}{1} = 3 \to$ [1 croce su 3 lanci]

$\binom{3}{2} = 3 \to$ [2 croci su 3 lanci]

$\binom{3}{3} = 1 \to$ [3 croci su 3 lanci]

NOTA

$$\underbrace{\binom{n}{n} = 1}_{} \longrightarrow \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\ \underbrace{0!}_{=1}} = 1$$

→ c'è un solo modo per prendere n oggetti e disporli su n posti quando non si è interessati all'ordine

→ c'è un solo modo per osservare n successi su n prove (vincere sempre)

$$\binom{n}{0} = 1 \longrightarrow \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$$

→ c'è un solo modo per osservare 0 successi su n prove (perdere sempre)

$$\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x} \longrightarrow$$ il nr. di modi di osservare x successi su n prove è uguale al numero di modi di osservare n−x successi su n prove

$$\frac{n!}{x!\,(n-x)!} = \frac{n!}{(n-x)!\,(n-[n-x])!} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$$