Variabili casuali

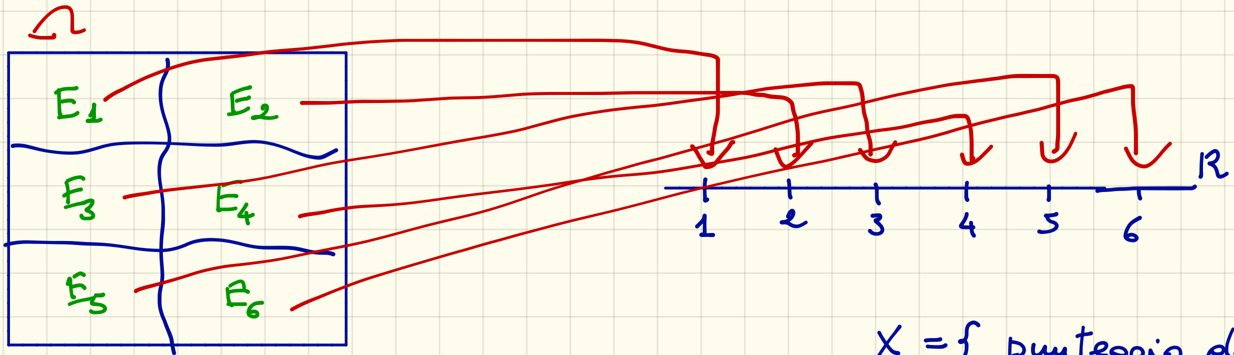
	Task Description	Due Date	Status
☐	Introduzione alle variabili casuali		
☐	V.c. discrete: distribuzione di probabilità e suoi requisiti		
☐	Comportamento di una v.c. rispetto ad una trasformazione nello spazio R		
☐	Due semplici modelli di v.c. discrete: il modello uniforme e il modello di Bernoulli		
☐	Principali indicatori di sintesi di una v.c.: media (o valore atteso), varianza/scarto quadratico medio ed asimmetria		
☐			
☐	Proprietà di media e varianza rispetto a trasformazioni lineari		
☐	Due particolari trasformazioni lineari: centratura e standardizzazione		
☐			
☐			
☐			

VARIABILE CASUALE (ALEATORIA, PROBABILISTICA)

↓

rappresentazione esperimento probabilistico sullo spazio dei numeri

Esperimento → lancio dado



$X = \{\text{punteggio dado}\}$

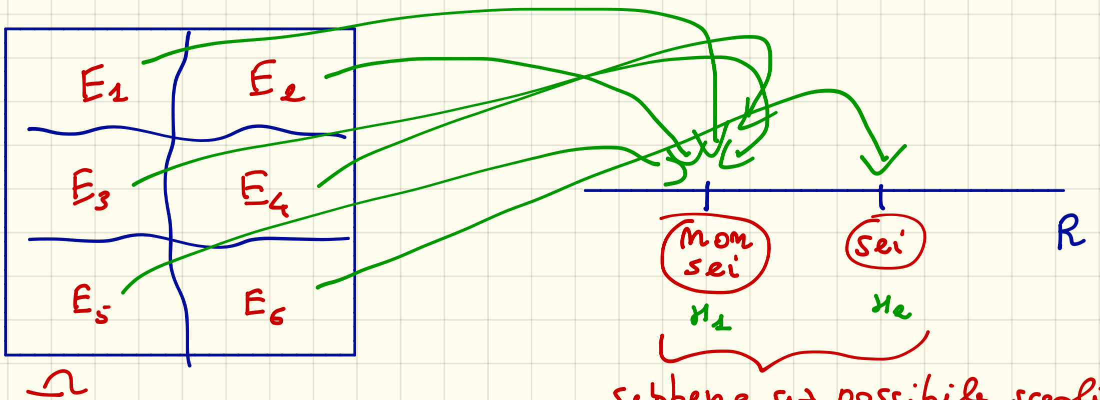
$X = \{1, 2, \dots 6\}$

$P(X=6) = P(E_6) = \frac{1}{6}$

$E_i = \{\text{uscita faccia punteggio } i\}$
$i = 1, 6$

$P(E_i) = \frac{1}{6}$

Esperimento lancio dado



sebbene sia possibile scegliere qualunque coppia di numeri, per convenzione si utilizza il numero 1 per indicare l'evento di interesse (successo) e il numero 0 per l'altro evento (insuccesso)

$X = \{ \text{uscita punteggio } 6 \}$

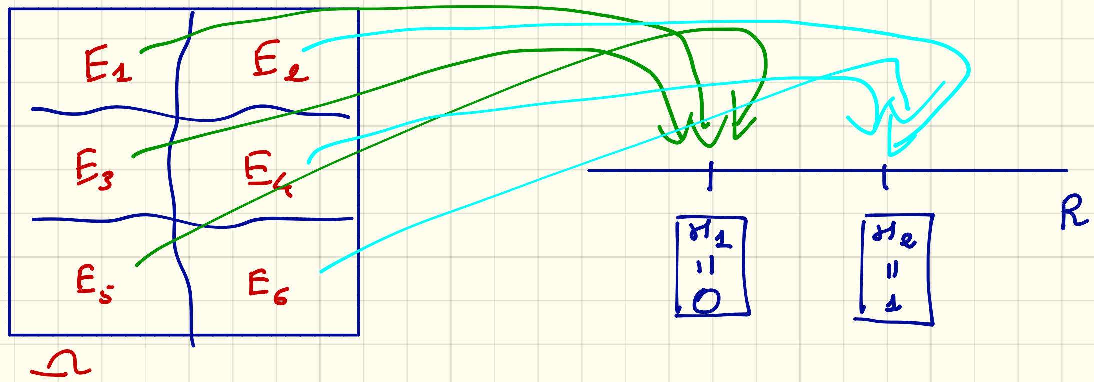
$X = \{ x_1, \; x_2 \}$

$$P(X = x_1) = P(x_1) = P\{ E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_5 \} = \frac{5}{6}$$

$$P(X = x_2) = P(E_6) = \frac{1}{6}$$

Ad ogni evento è associato uno ed un solo numero ma non è sempre vero il contrario

Esperimento lancio dado



$P(X=0) = P\{E_1 \cup E_3 \cup E_5\} =$

$= P(E_1) + P(E_3) + P(E_5) =$

$= \frac{1}{2}$

$X = \{$ punteggio pari $\}$

$X = \{0, 1\}$

0 → punteggio dispari

1 → punteggio pari

$P(X=1) = \frac{1}{2}$

Una v.c. è una funzione definita sullo spazio degli eventi che assume valori in $\mathbb{R}$ (da Ω in $\mathbb{R}$)

→ non necessariamente biunivoca

→ la funzione è definita in $\mathbb{R}$ anche nel caso di variabili qualitative (vedi esempi precedenti)

NOTA BENE

Qualunque trasformazione effettuata sui valori della X (spazio $\mathbb{R}$) non altera i valori delle corrispondenti probabilità

X = punteggio dado

$Y = 2X - 1$

Y	$p(y)$
1	$P(Y=1) = P(X=1) = P(E_1) = \frac{1}{6}$
3	1/6
5	1/6
7	1/6
9	1/6
11	1/6
	1

X	$p(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
	1

I precedenti esempi riguardano r.c. discrete

↓

variabili che assumono valori su un insieme discreto

n° finito di valori

infinità numerabile

↓

n° clienti che si presentano allo sportello

$\{0, 1, 2, \dots\}$

Rappresentazione r.c.

tabella

funzione

distribuzione probabilità della r.c.

↓

elenco valori con le corrispondenti probabilità

X	$p(X=x_i) = p(x_i) = p_i$
x_1	p_1
x_2	p_2
$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_i
$\vdots$	$\vdots$
x_k	p_k
	1

Requisiti distribuzioni probabilità

- $p_i \geq 0$

  I assioma

- $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} p_i}$ $= 1$

  II assioma

$\downarrow$

P(X assuma uno qualunque dei possibili valori)

$\parallel$

$P(\Omega)$

X = punteggio dado

X	$p(x)$
1	1/6
2	1/6
$\vdots$	$\vdots$
6	1/6
	1

$$\boxed{f(x) = p(x) = \frac{1}{6} \quad \forall\, i = 1, 6 \qquad x = (1, 2, \dots 6)}$$

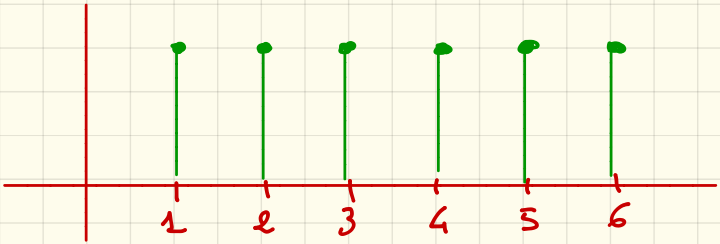
$f(0)$

$f(1)$

$\vdots$

esempio di una r.c. uniforme discreta

la prob. è costante su tutti i possibili valori



$X = \{\text{uscita faccia } 6\}$

X	$p(x)$
0	$5/6$
1	$1/6$
	1

$$f(x) = P(X = x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}$$

$x = \{0, 1\}$

$$f(0) = P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{1-0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0} = \frac{5}{6}$$

$$f(1) = P(X=1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1} = \frac{1}{6}$$

esempio di modello di Bernoulli $\rightarrow$ posso dividere l'esperimento in evento successo ed evento insuccesso

Se X è una v.c. discreta, la sua distribuz. di probabilità

$$f(x) = P(X = x)$$

deve soddisfare due requisiti

$$f(x) \geq 0$$

$$\sum_x f(x) = 1$$

Sulle v.c. è possibile calcolare tutti gli indici di sintesi già studiati nella parte descrittiva (sostituendo nelle formule le probabilità alle frequenze)

- indici posizione μ, Me, Mo, quantili, min, max
- indici variabilità σ, S_{Me}, Δ, campi di variazione
- indici forma $\mu \lesseqgtr Me$, Yule Bowley, Fisher

Funzione di ripartizione $\rightarrow$ $F(x) = P(X \leq x)$

nella parte descrittiva abbiamo definito funzione di ripartizione empirica la frequenza cumulata

strumento comune sia ai modelli discreti che a quelli continui

cumuliamo la probabilità fino al punto x

NOTA BENE:

Se X è una v.c. discreta $\rightarrow$ $\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$

$$\left(\bullet \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \; ; \; \bullet \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \right)$$

La $F(x)$ viene usata per calcolare la prob. in corrispondenza di un intervallo $]a, b]$ $\rightarrow$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$
$$= F(b) - F(a)$$

In termini generici si indica con π la probabilità che si verifichi l'evento successo e con $1-\pi$ la probab. che si verifichi l'insuccesso

X	$p(x)$
0	$1-\pi$
1	π
	1

$$f(x) = P(X=x) = (1-\pi)^{1-x}\,\pi^{x}$$

$x = \{0, 1\}$

$X \sim Ber(\pi)$

π → parametro

Ber → Bernoulli

$\sim$ → si distribuisce come (segue una distribuzione di probabilità)

→ $X \sim f(x;\theta)$ generica v.c. che segue un modello probabilistico descritto da $f(x)$ caratterizzato dal parametro (o vettore di parametri in alcuni casi) θ

ESERCIZIO

$X \sim Ber(\pi)$ per la v.c. di Bernoulli

Dimostrare che:

- $\mu_X = \pi$
- $\sigma_X^2 = \underbrace{\pi(1-\pi)}$

caso di max variabilità si ha quando $\pi = 1 - \pi = 0,5$

$\sigma_X^2 = 0,25$

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p_i$$

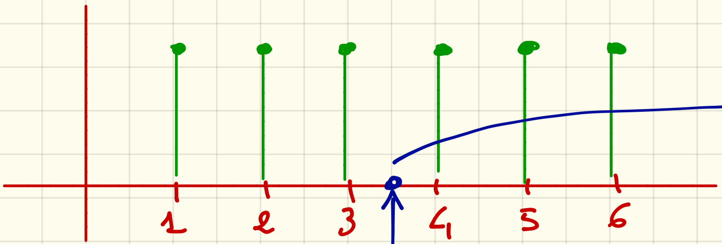
expectation (valore atteso)

X = punteggio dado

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(X = x_i) = \frac{1}{6} \quad \forall x_i$$

$$\mu_X = E(X)$$



3,5

$\mu = Me$

se lanciassi un dado per $n \to \infty$ calcolando la media dei punteggi ottenuti otterrei un valore pari a 3,5

$\downarrow$

media dei valori per $n \to \infty$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{Var(X)}$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{K} (x_i - \mu_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{K} x_i^2 p_i - \mu_x^2$$

$$I_F = Asim(X) = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \right)^3 p_i$$

Per μ_x e σ_x^2 valgono tutte le proprietà già studiate per media e varianza nella parte descrittiva

→ di particolare interesse quelle riguardanti le trasformazioni lineari

Sia X una generica variabile casuale; si definisce trasformazione lineare la seguente funzione:

$$Y = a + bX$$

a: coefficiente di traslazione

b: coefficiente di scala

$$\mu_Y = a + b\,\mu_X$$

$$\sigma_Y^2 = b^2\,\sigma_X^2$$

$$\boxed{\sigma_Y = b\,\sigma_X}$$

Due particolari trasformazioni

- centratura $\quad b = 1, \quad a = -\mu_X$

$$Y = X - \mu_X$$

- standardizzazione $\quad b = \frac{1}{\sigma_X}, \quad a = -\frac{\mu_X}{\sigma_X}$

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = Z$$

$$Y = X - \mu_X \longrightarrow \mu_Y = E(X - \mu_X) = E(X) - E(\mu_X) =$$

$$= \mu_X - \mu_X = 0$$

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \longrightarrow \mu_Y = a + b\,\mu_X = \frac{-\mu_X}{\sigma_X} + \frac{1}{\sigma_X}\,\mu_X = 0$$

$$\longrightarrow \sigma_Y^2 = b^2 \sigma_X^2 = \frac{1}{\sigma_X^2}\,\sigma_X^2 = 1 = \sigma_X$$