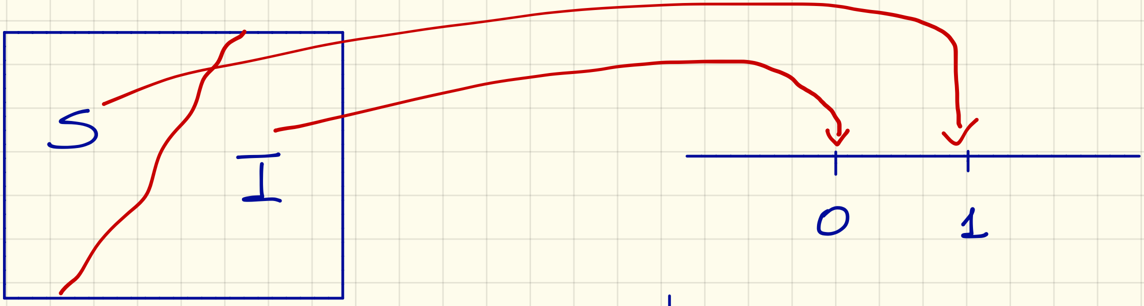
Modelli per v.c. discrete

	Task Description	Due Date	Status
☐	Il modello binomiale: numero di successi in n ripetizioni di un esperimento di Bernoulli		
☐	Distribuzione di probabilità di una v.c. binomiale, valore atteso, varianza e forma della distribuzione		
☐	La v.c. binomiale come somma di n v.c. bernoulliane corrispondenti alle n prove		
☐	Trasformazione della v.c. binomiale: la v.c. frequenza relativa (o proporzione) di successi		
☐	Il modello geometrico per valutare il n. di prove necessarie ad ottenere il primo successo		
☐	Variabile casuale binomiale negativa		
☐	Variabile casuale ipergeometrica		
☐	Convergenza della v.c. ipergeometrica alla v.c. binomiale		
☐	Variabile casuale di Poisson		
☐			

MODELLO BERNOULLI



S = successo

I = insuccesso

$X \sim Ber(\pi)$

parametro

X	$p(x)$
0	$1-\pi$
1	π

$$f(x) = (1-\pi)^{1-x}\,\pi^{x}$$

$$x = \{0, 1\}$$

$$E(X) = \mu_x = \pi$$

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \pi(1-\pi)$$

MODELLO BINOMIALE

Si supponga di ripetere per n volte un esperimento bernoulliano

↓

se sono interessato a contare il n. di successi nelle n prove posso utilizzare la v. c. binomiale

$$X \sim bin(n, \pi)$$

n = ripetizione dell'esperimento di Bernoulli

π = prob. successo singola prova (costante nelle n prove)

$$X = \{\underbrace{0, 1, 2, \dots, n}_{n+1 \text{ possibili valori}}\}$$

Esempio $\rightsquigarrow$ lancio di un dado per $n = 3$ volte

singolo esperimento $\quad X \sim Ber\left(\pi = \frac{1}{6}\right)$

Y = n. successi (n. 6) nelle $n = 3$ prove

$$Y \sim bin\left(n = 3,\ \pi = \frac{1}{6}\right)$$

$n = 3$ lanci $\rightsquigarrow$ $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ possibili risultati

$$\boxed{\begin{array}{l} I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ S = \{6\} \end{array}}$$

X_i = esito i-esima prova $\longrightarrow$ $X_i \sim Ber\left(\pi = \frac{1}{6}\right)$

$i = \{1, 3\}$

binomiale come somma di 3 Bernoulliane

X_1	X_2	X_3	$X_1 + X_2 + X_3 = Y$
$I_1 \to 0$	$I_2 \to 0$	$I_3 \to 0$	0
$S_1 \to 1$	$I_2 \to 0$	$I_3 \to 0$	1
$I_1 \to 0$	$S_2 \to 1$	$I_3 \to 0$	
$I_1 \to 0$	$I_2 \to 0$	$S_3 \to 1$	
$S_1 \to 1$	$S_2 \to 1$	$I_3 \to 0$	2
$S_1 \to 1$	$I_2 \to 0$	$S_3 \to 1$	
$I_1 \to 0$	$S_2 \to 1$	$S_3 \to 1$	
$S_1 \to 1$	$S_2 \to 1$	$S_3 \to 1$	3

$0 \longrightarrow \cancel{P(Y=0) = \frac{1}{8}}$

ATTENZIONE: se ci sono 8 possibili triplette non è (sempre) vero che la prob. di ciascuna di esse è $\frac{1}{8}$

$$\underbrace{P(Y=0)}_{1-\pi = \frac{5}{6}} > \underbrace{P(Y=3)}_{\pi = \frac{1}{6}}$$

in questo esempio è più probabile perdere sempre

X_i = esito i-esima prova $\longrightarrow X_i \sim Ber\left(\pi = \frac{1}{6}\right)$

$i = \{1, 3\}$

binomiale come somma di 3 Bernoulliane

X_1	X_2	X_3	$\underbrace{X_1 + X_2 + X_3}_{} = Y$
$I_1 \to 0$	$I_2 \to 0$	$I_3 \to 0$	0
$S_1 \to 1$	$I_2 \to 0$	$I_3 \to 0$	
$I_1 \to 0$	$S_2 \to 1$	$I_3 \to 0$	1
$I_1 \to 0$	$I_2 \to 0$	$S_3 \to 1$	
$S_1 \to 1$	$S_2 \to 1$	$I_3 \to 0$	
$S_1 \to 1$	$I_2 \to 0$	$S_3 \to 1$	2
$I_1 \to 0$	$S_2 \to 1$	$S_3 \to 1$	
$S_1 \to 1$	$S_2 \to 1$	$S_3 \to 1$	3

$$0 \longrightarrow P(Y=0) = P(\underbrace{I_1 \cap I_2 \cap I_3}_{\text{indipendenti}}) =$$

$$= P(I_1)\,P(I_2)\,P(I_3) =$$

$$= (1-\pi)(1-\pi)(1-\pi) =$$

$$= (1-\pi)^3$$

X_i = esito i-esima prova $\rightsquigarrow X_i \sim Ber\left(\pi = \frac{1}{6}\right)$

$i = \{1, 3\}$

binomiale come somma di 3 Bernoulliane

X_1	X_2	X_3	$\overbrace{X_1 + X_2 + X_3} = Y$
$I_1 \hookrightarrow 0$	$I_2 \hookrightarrow 0$	$I_3 \hookrightarrow 0$	0
$S_1 \hookrightarrow 1$	$I_2 \hookrightarrow 0$	$I_3 \hookrightarrow 0$	
$I_1 \hookrightarrow 0$	$S_2 \hookrightarrow 1$	$I_3 \hookrightarrow 0$	1
$I_1 \hookrightarrow 0$	$I_2 \hookrightarrow 0$	$S_3 \hookrightarrow 1$	
$S_1 \hookrightarrow 1$	$S_2 \hookrightarrow 1$	$I_3 \hookrightarrow 0$	
$S_1 \hookrightarrow 1$	$I_2 \hookrightarrow 0$	$S_3 \hookrightarrow 1$	2
$I_1 \hookrightarrow 0$	$S_2 \hookrightarrow 1$	$S_3 \hookrightarrow 1$	
$S_1 \hookrightarrow 1$	$S_2 \hookrightarrow 1$	$S_3 \hookrightarrow 1$	3

$$P(Y=1) = P\{(S_1 \cap I_2 \cap I_3) \cup (I_1 \cap S_2 \cap I_3) \cup (I_1 \cap I_2 \cap S_3)\} =$$

eventi incompatibili

$$= P(\underbrace{S_1 \cap I_2 \cap I_3}) + P(\underbrace{I_1 \cap S_2 \cap I_3}) + P(\underbrace{I_1 \cap I_2 \cap S_3})$$

ev. indipendenti

$$= \underbrace{P(S_1)P(I_2)P(I_3)} + \underbrace{P(I_1)P(S_2)P(I_3)} + \underbrace{P(I_1)P(I_2)P(S_3)} =$$

queste 3 prob. sono uguali

$$= 3\,(1-\pi)^2\,\pi$$

X_i = esito i-esima prova $\rightsquigarrow X_i \sim Ber\left(\pi = \frac{1}{6}\right)$

$i = \{1, 3\}$

binomiale come somma di 3 Bernoulliane

X_1	X_2	X_3	$\overbrace{X_1 + X_2 + X_3} = Y$
$I_1 \to 0$	$I_2 \to 0$	$I_3 \to 0$	0
$S_1 \to 1$	$I_2 \to 0$	$I_3 \to 0$	1
$I_1 \to 0$	$S_2 \to 1$	$I_3 \to 0$	1
$I_1 \to 0$	$I_2 \to 0$	$S_3 \to 1$	1
$S_1 \to 1$	$S_2 \to 1$	$I_3 \to 0$	2
$S_1 \to 1$	$I_2 \to 0$	$S_3 \to 1$	2
$I_1 \to 0$	$S_2 \to 1$	$S_3 \to 1$	2
$S_1 \to 1$	$S_2 \to 1$	$S_3 \to 1$	3

$P(Y = 2) = 3\,(1 - \pi)\,\pi^2$

$P(Y = 3) = \pi^3$

Y	$p(y)$
0	$(1-\pi)^3 \longrightarrow 1 \times (1-\pi)^3 \times \pi^0$
1	$3\,(1-\pi)^2\,\pi$
2	$3\,(1-\pi)\,\pi^2$
3	$\pi^3 \longrightarrow 1 \times (1-\pi)^0\,\pi^3$

n. modi in cui si possono osservare x successi su n prove $\binom{n}{x}$

prob. insuccesso$^{\text{n. insuccessi}}$ $\rightarrow (1-\pi)^{n-x}$

prob. successo$^{\text{n. successi}}$ $\rightarrow \pi^{x}$

$X \sim bin(n, \pi)$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x}(1-\pi)^{n-x}\,\pi^{x}$$

$x = \{0, 1, ..., n\}$

La binomiale può essere vista come somma di n Bernoulli

$$\left[\begin{array}{l} E(X) = \mu_X = n\pi \\ Var(X) = \sigma^2_X = n\pi(1-\pi) \end{array}\right]$$

ricordando che π è la media della Bernoulli e che $\pi(1-\pi)$ è la sua varianza

→ se $n \to \infty$ allora sia μ_X che $\sigma^2_X \to \infty$

↓

si può ricorrere ad una semplice trasformazione lineare per cercare di correggere questo problema → invece di contare il n. di successi considero la proporzione di successi

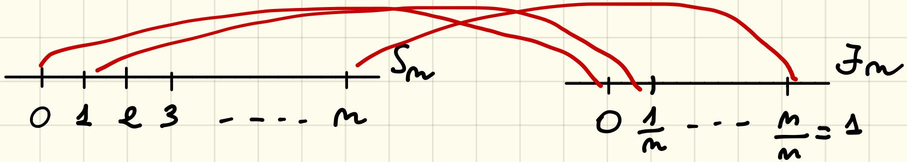
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{dove } X_i \sim Ber(\pi)$$

somma di n Bernoulli

$$S_n \sim bin(n, \pi)$$

$$E(S_n) = n\pi \qquad Var(S_n) = n\pi(1-\pi)$$

$$\frac{S_n}{n} = F_n$$ proporzione di successi (o freq. relativa)



$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \pi = \pi$$

$$Var(F_n) = Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(S_n) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n} \pi(1-\pi) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

se $n \to \infty$
$Var(F_n) \to 0$

Per ragionare sulle probab. associate alle F_n posso usare il modello binomiale

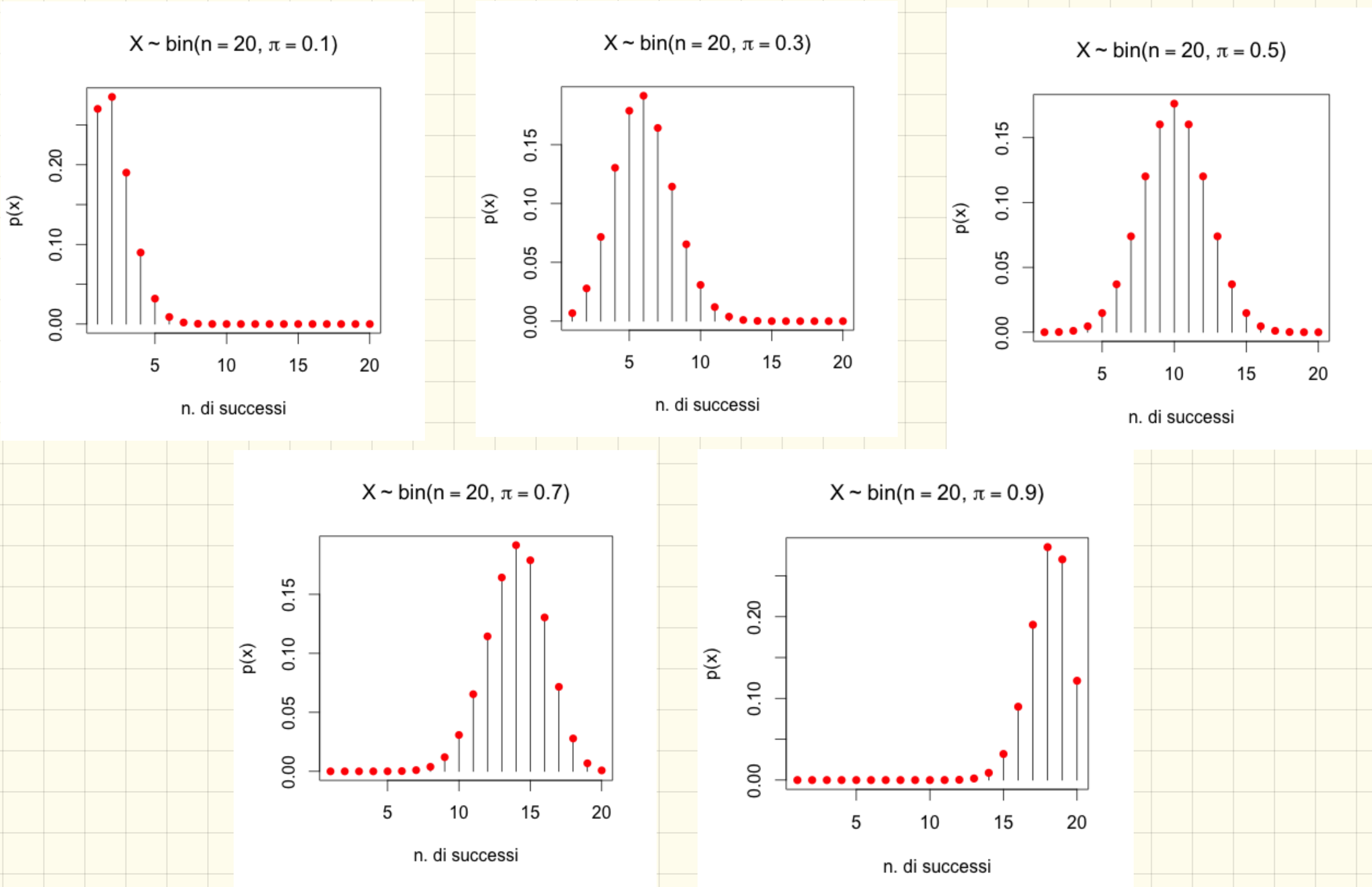
- se $\pi = 1 - \pi$ la v.c. binomiale è simmetrica
- se $\pi < 1 - \pi$ la v.c. binomiale è asimmetrica a dx (per valori "piccoli" di n)
- se $\pi > 1 - \pi$ la v.c. binomiale è asimmetrica a sx (per valori "piccoli" di n)

per n crescente ($n \to \infty$) la v.c. binomiale diventa simmetrica

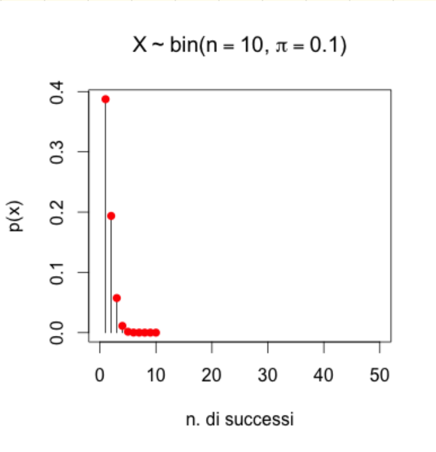
→ per $n \to \infty$ la v.c. binomiale può essere approssimata da una funzione campanulare perfettamente simmetrica

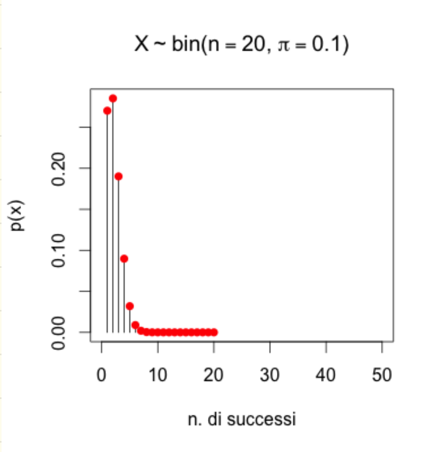
[TEOREMA LIMITE CENTRALE]

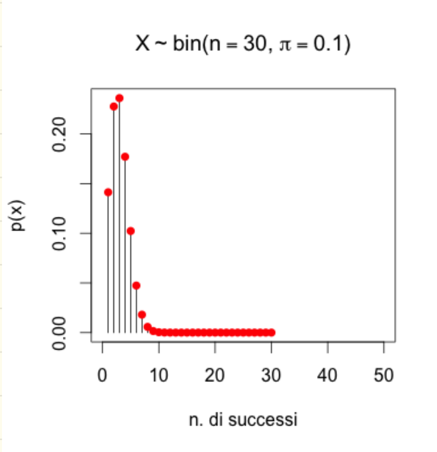
V. c. binomiale al crescere di π per n fisso

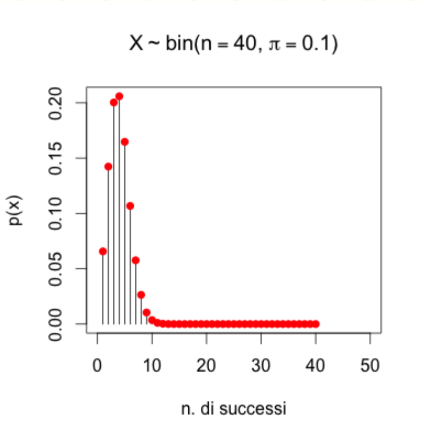


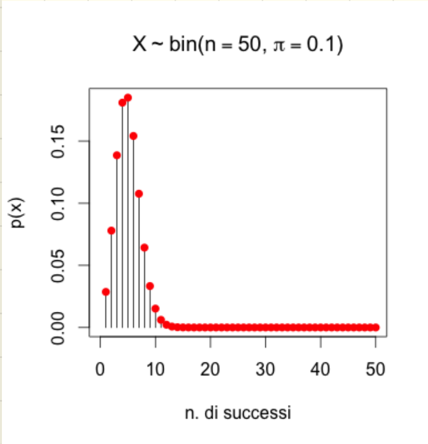
v.c. binomiale al crescere di n per π fisso











MODELLO GEOMETRICO

Se ripetendo un esperimento di Bernoulli sono interessato a calcolare la probabilità che occorrano x prove per ottenere il primo successo

$$X \sim Geo(\pi) \longrightarrow x = \{ \underset{\text{min}}{1}, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots \}$$

infinità numerabile di possibili valori

$$P(X=1) = P(S_1) = \pi$$

$$P(X=2) = P(I_1 \cap S_2) = P(I_1)\,P(S_2) = (1-\pi)\,\pi$$

$$P(X=3) = P(I_1 \cap I_2 \cap S_3) = (1-\pi)^2\,\pi$$

$$\vdots$$

$$P(X=n) = P(\underbrace{I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{n-1}}_{\substack{n-1 \text{ insuccessi} \\ \text{sulle prime } n-1 \text{ prove}}} \cap \underbrace{S_n}_{\substack{\text{successo} \\ \text{all'ultima prova}}}) = (1-\pi)^{n-1}\,\pi$$

$$\vdots$$

$$X \sim Geo(\pi)$$

$$f(x) = P(X = x) = (1-\pi)^{x-1}\,\pi$$

$$x = \{0, 1, \dots\}$$

$$E(X) =$$

$$Var(X) =$$

La v.c. geometrica è asimmetrica a destra. La prob. che X assuma valori alti decresce al crescere di π

se la prob. di successo nella singola prova è alta è poco probabile che occorra un n. alto di volte per vincere la prima volta

v.c. Geometrica al variare del parametro π