Verifica di ipotesi

	Task Description	Due Date	Status
☐	Introduzione alla verifica di ipotesi: partizione dello spazio parametrico, ipotesi nulla e ipotesi alternativa, partizione dello spazio campionario, utilizzo dello spazio della statistica e sua partizione in regione di rifiuto (critica) e regione di accettazione		
☐	Tipi di ipotesi: ipotesi semplici e ipotesi composte (bidirezionale e unidirezionale)		
☐	Ipotesi alternativa e sua influenza sulla forma della regola di decisione		
☐	Tipi di errore del processo decisionale (errore di I tipo e di II tipo) e corrispondenti probabilità		
☐	Legame tra errore di I tipo e di II tipo		
☐	L'approccio classico alla verifica di ipotesi basato sulla teoria di Neyman - Pearson		
☐	I passi di un processo di verifica di ipotesi		
☐	Test sulla media di una popolazione normale (caso di varianza nota ed incognita)		
☐	Test asintotico sulla media nel caso di una popolazione non normale		

$X \sim f(x; \theta)$

$\downarrow$

conoscenza pregressa su θ

$\downarrow$

ipotesi H_0
(ipotesi nulla)

$\downarrow$

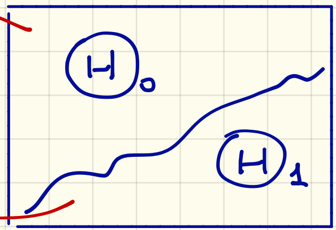
si utilizzano le informazioni campionarie per valutare se tale ipotesi possa essere ritenuta valida

VERIFICA DI IPOTESI STATISTICHE

$\downarrow$

~~regola di~~ decisione sullo spazio parametrico

Θ : spazio parametrico



insieme dei valori di θ coerenti con H_0

ipotesi alternativa

$\uparrow$

H_1 [insieme dei valori di θ non coerenti con H_0

SISTEMA DI IPOTESI

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_1 \quad (\theta \notin \Theta_0)$$

obiettivo è scegliere tra queste due ipotesi

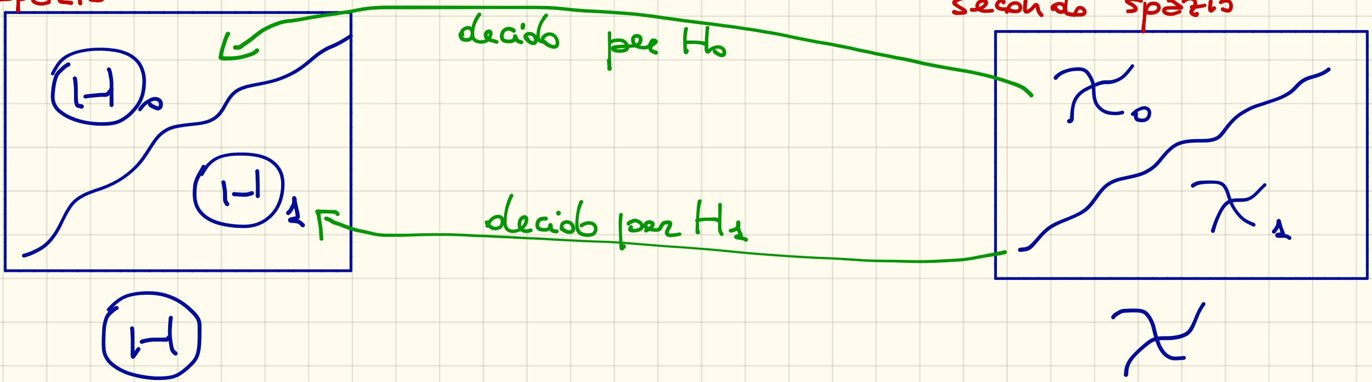
le ipotesi sono fissate sullo spazio parametrico

NOTA BENE

la decisione finale riguarda θ, il parametro che caratterizza la popolazione che stiamo studiando

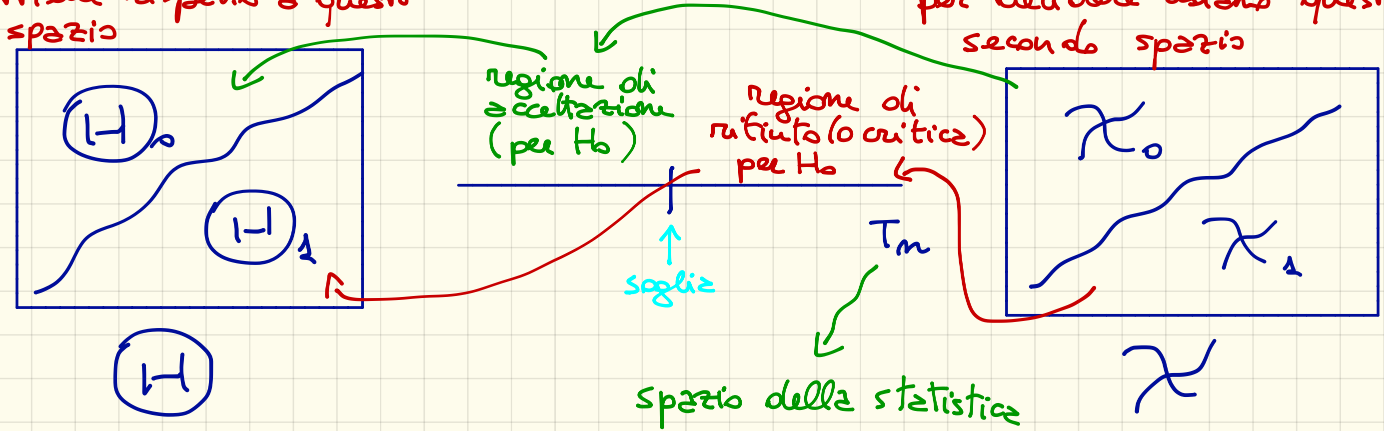
la decisione finale avviene rispetto a questo spazio

per decidere usiamo questo secondo spazio



la decisione finale avviene rispetto a questo spazio

per decidere usiamo questo secondo spazio



spazio della statistica

più agevole da gestire: sintetizza il particolare campione con un solo numero

Il processo di verifica si "riduce" alla ricerca della partizione dello spazio di T_n in regione di accettazione e regione di rifiuto

sostanzialmente nel trovare la soglia

ESEMPIO

La durata delle lampadine prodotte da una certa azienda segue una distribuzione normale con media 2000 ore e deviazione standard pari a 250 ore. Viene impiegato un nuovo componente di cui non si è certi riguardo all'affidabilità. Si decide di utilizzare un campione di 100 lampadine per valutare tale componente. Si utilizza la seguente regola di decisione: il componente peggiora la produzione se la media osservata sul campione è minore di 1960 ore.

$$X \sim N(\underbrace{\mu_0 = 2000}_{\text{parametro su cui decidere}}, \sigma = 250)$$

σ: parametro noto

sistema ipotesi

$$\boxed{H_0 : \mu = 2000}$$

$$H_1 : \mu < 2000$$

da un punto di vista pratico è equivalente $H_0 : \mu \geq 2000$

Fissando $H_1 : \mu < 2000$ sto dicendo che mi preoccupo solo per spostamenti sulla sinistra

NOTA:

$\mu = 2000$ — ipotesi semplice — definisce in maniera univoca la mia $f(x_i; \theta)$

ipotesi unidirezionali: $\mu < 2000$, $\mu > 2000$

ipotesi bidirezionale: $\mu \neq 2000$

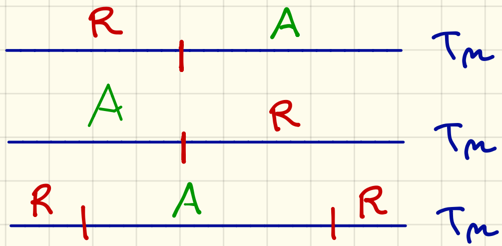
ipotesi composte $\downarrow$ definiscono ∞ possibili distribuzioni per X

La scelta di H_1 determina la forma della regola di decisione

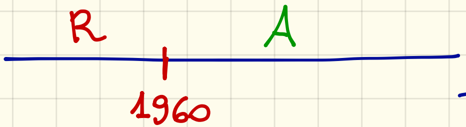
$H_1 : \theta < \theta_0$

$H_1 : \theta > \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0$

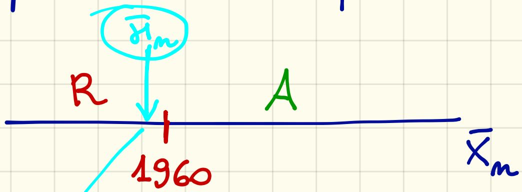


Sull' esempio delle lampadine la regola di decisione è:



$T_n = \bar{X}_n$

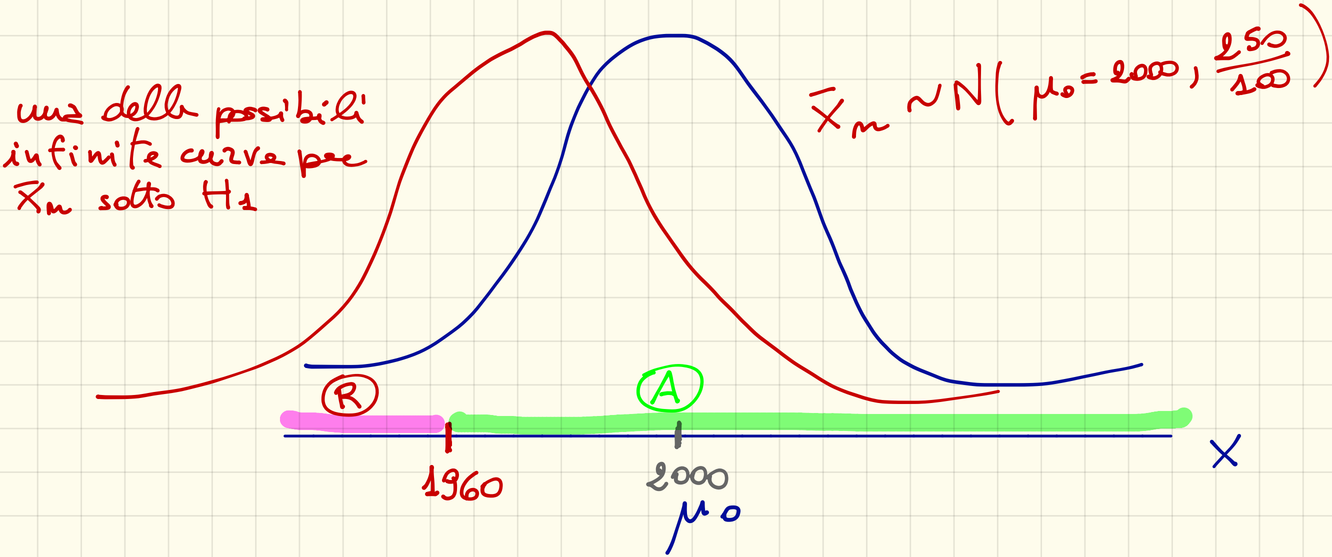
Supponiamo che il campione di 100 lampadine abbia una durata media di 1955 ore



$\boxed{\text{rifiuto } H_0}$ decisione finale

Per introdurre i possibili errori di un processo decisionale di questo tipo conviene ragionare sulla distribuzione di probabilità di $T_n = \bar{X}_n$

$$X \sim N(\mu_0, \sigma^2_{\text{nota}}) \rightsquigarrow \bar{X}_n \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

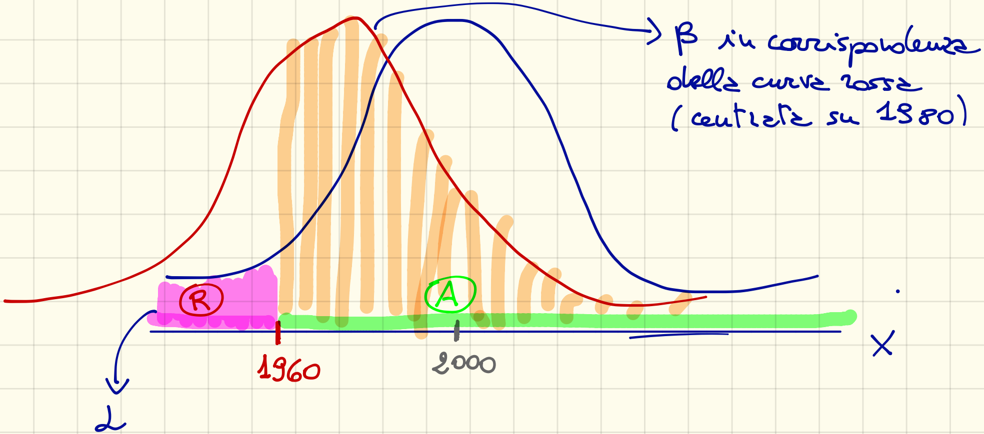


	Scelgo H_0	Scelgo H_1
H_0 è vero	OK	errore di I tipo → $T_n \in R \mid H_0$
H_0 è falso (H_1 è vero)	errore di II tipo → $T_n \in A \mid H_1$	OK

$$\alpha = P(\text{errore I tipo}) = P(T_n \in R \mid H_0)$$

$$\beta = P(\text{errore II tipo}) = P(T_n \in A \mid H_1)$$

un buon processo decisionale dovrebbe minimizzare α e β



Le due probabilità α e β si muovono in verso opposto: se sposto la soglia a sx diminuisce α ed aumenta β e viceversa se sposto la soglia verso dx

L'unica possibilità per diminuire contemporaneamente α e β è di aumentare n: le due curve si "stringono" rispetto ai corrispondenti valori medi

↳ sfrutto la consistenza della statistica $\overline{X}_n$

Nella procedura classica (di Neyman - Pearson) si tende a "controllare" la prob. di commettere un errore del I tipo

$$\alpha = P(\text{errore I tipo}) =$$
$$= P(\text{rifiutare } H_0 \mid H_0) =$$
$$= P(T_n \in R \mid H_0)$$

di solito si fissa $\underbrace{\alpha = 0.01}_{1\%}$, $\underbrace{\alpha = 0,05}_{5\%}$ o $\underbrace{\alpha = 0,1}_{10\%}$

e si sceglie la statistica T_n che minimizza β

$$\beta = P(\text{errore II tipo}) = P(\text{accetto } H_0 \mid H_1) =$$
$$= P(T_n \in A \mid H_1)$$

Spesso si lavora ragionando sul complemento ad 1 di β

$$\gamma = \underbrace{1-\beta}_{\text{potenza del test}} = P(\text{rifiutare correttamente } H_0) =$$

$$= P(T_n \in R \mid H_1)$$

minimizzare β equivale a massimizzare $1-\beta$

La procedura di Neyman-Pearson lavora fissando α e scegliendo la statistica T_n che minimizza β (massimizza γ)

statistica test: particolare statistica la cui distribuzione è completamente nota sotto H_0

fino a prova contraria H_0 è vera

PASSI DA SEGUIRE PER LA VERIFICA DI IPOTESI

$\boxed{0}$ cercare di individuare bene nei dati le informaz. che fanno riferimento alla popolazione e quelle che fanno riferimento al campione

(1) stabilire il sistema di ipotesi (H_0 e H_1)

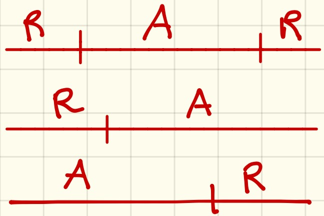
il valore ipotizzato viene usato nei passaggi successivi di calcolo per T_n

forma regola decisione

$H_1: \theta \neq \theta_0$

$H_1: \theta < \theta_0$

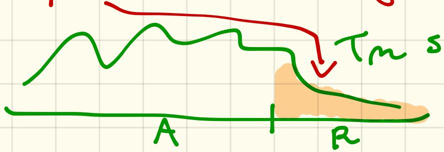
$H_1: \theta > \theta_0$



(2) fissare α] $\longrightarrow$ determina l'ampiezza della regola

$\alpha = P(T_n \in R \mid H_0)$

T_n sotto H_0



③ determinare la statistica test T_n

statistica e corrispondente distribuzione campionaria

④ determinare la regola di decisione

consiste nel determinare la soglia (test unidirezionale) o le soglie (test bidirezionale)

calcolo percentili della distribuz. campionaria di T_n

NOTA: fino a questo punto non sto utilizzando le osservazioni campionarie (l'unica cosa che mi serve sapere è il numero delle osservazioni n)

⑤ esperimento campionario e conseguente decisione

ESERCIZIO (test sulla media, varianza della popolazione nota)

La durata delle lampadine prodotte da una certa azienda ha media pari a 2000 ore e deviazione standard pari a 250 ore.
La produzione dell'ultima settimana è stata effettuata impiegando un nuovo tipo di materiale sulla cui qualità il responsabile della produzione avanza seri dubbi. Prima di mettere in vendita le lampadine prodotte desidera pertanto verificare se possa avere influito sulla durata delle lampadine. Esamina un campione di 100 lampadine, su cui misura la durata media, che risulta pari a 1955 ore. E' possibile affermare, con significatività $\alpha = 0.05$, che tale riduzione sia imputabile alla scarsa qualità del materiale utilizzato?

$\boxed{0}$ DATI POPOLAZIONE

$\mu = 2000$ → H_0 (punto di partenza) → conoscenza pregressa

$\sigma = 250$ → varianza popolazione

DATI CAMPIONARI

$n = 100$

$\bar{x}_n = 1955$

DATI FORNITI DALLA TRACCIA

$\alpha = 0{,}05$

H_1 di tipo unidirezionale sx

→ sono preoccupato di eventuali peggioramenti dovuti all'introduzione del nuovo componente

① Fissare le ipotesi

$H_0 : \mu = 2000$ → scrivere queste ipotesi equivale a scrivere $\mu \geq 2000$ (vedi passo 5)

$H_1 : \mu < 2000$

② Fissare α

$\alpha = 0{,}05$

③ Determinare T_n

$T_n = \bar{X}_n$ (test sul parametro μ)

$X \sim f$ popolaz. ?

$\Downarrow$ (TLC, $n = 100$)

$\bar{X}_n \longrightarrow N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu_0 = 2000, \ \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{250^2}{100}\right)$$

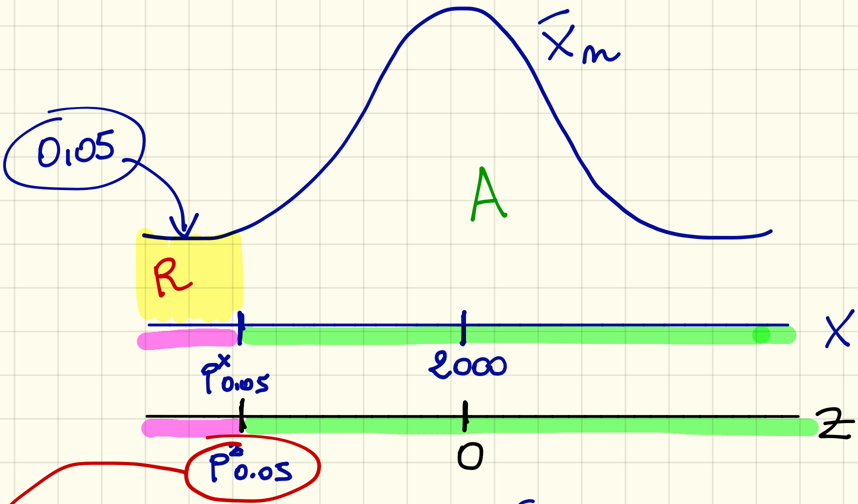
la distribuzione di T_n è nota sotto H_0

4) Regola di decisione

$\alpha = 0{,}05 = P(T_n \in R \mid H_0)$

$\parallel$

$P(\bar{X}_n \in R \mid H_0)$



Regola (scala X): se $\bar{X}_n$ è ≤ 1958.9 rifiuto H_0

Determinare la soglia (ovvero il percentile) che ci assicura l'α fissato al passo 2

5° percentile $N(0,1)$] $z_\alpha = -1{,}645$] 5° percentile scala X

$$\mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =$$

$$= 2000 - 1{,}645 \times \frac{250}{10}$$

$$= 1958{,}9$$

REGOLA (scala z)
se $\bar{X}_n$ osservato, una volta standardizzato è $\leq -1{,}645$ rifiuto H_0

(5) ESPERIMENTO CAMPIONARIO

Se nel passaggio ho portato la soglia sulla scala X, posso già concludere

$1955 \in R$
rifiuto H_0

R A

soglia

1958,9

(−1,645 scala z)

Se nel passaggio ho lavorato sulla scala z, per decidere devo portare $\bar{X}_n$ sulla stessa scala

$$\frac{1955 - 2000}{\frac{250}{10}} = -1{,}8 \in R \quad \text{rifiuto } H_0$$

ESERCIZIO (test sulla media, varianza della popolazione nota)

La durata delle lampadine prodotte da una certa azienda ha media pari a 2000 ore e deviazione standard pari a 250 ore.

La produzione dell'ultima settimana è stata effettuata impiegando un nuovo tipo di materiale di cui si ignorano le performance.

Prima di mettere in vendita le lampadine prodotte, si desidera dunque indagare sulla qualità del materiale impiegato, valutandone, in particolare, l'effetto sulla durata delle lampadine.

Si esamina un campione di 100 lampadine, la cui durata media risulta pari a 2010 ore. E' possibile affermare, con significatività $\alpha = 0.05$, che tale variazione sia imputabile al nuovo materiale utilizzato?

0 $X \sim f(2000, 250^2)$

(?) sotto f; μ_0 sotto 2000; σ^2 sotto 250^2 $\longrightarrow$ varianza della popolazione nota

1 $n = 100$

$\bar{x}_n = 2010$

ALTRI DATI $\rightsquigarrow$ $\alpha = 0{,}05$, ipotesi bidirezionale

(1) $H_0: \mu = 2000$

$H_1: \mu \neq 2000$

(2) $\alpha = 0{,}05$

(3) $\bar{X}_n \longrightarrow N\left(2000, \frac{250^2}{100}\right)$

(4)

R	A	R

$-z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad$ $+z_{\frac{\alpha}{2}}$

$-1{,}96$ $\qquad$ $+1{,}96$

(5) $T_n = \dfrac{2010 - 2000}{\frac{250}{10}} = 0{,}4 \in A$

non rifiuto H_0

Nel caso in cui la varianza della popolazione è incognita

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$\downarrow$

parametro di disturbo

si procede a stimarlo usando la varianza campionaria corretta.

Per cui la statistica test diventa

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Se cade l'ipotesi di normalità, si può procedere allo stesso modo se n è sufficientemente grande, sfruttando il teorema del limite centrale

	Task Description	Due Date	Status
☐	Approccio basato sul p-value: caso di un test unidirezionale e di un test bidirezionale		
☐	Riepilogo stastistiche test per i principali test parametrici (media, varianza e proporzione) ad un campione		
☐	Riepilogo statistiche test per i principali test parametrici (confronto tra medie, varianze e proporzioni) a due campioni		
☐	Alcuni esempi		
☐			
☐			
☐			
☐			
☐			
☐			

RIPETIAMO LO STESSO ESERCIZIO USANDO L'APPROCCIO DEL p-value (valore p)

ESERCIZIO (test sulla media, varianza della popolazione nota)

La durata delle lampadine prodotte da una certa azienda ha media pari a 2000 ore e deviazione standard pari a 250 ore.

La produzione dell'ultima settimana è stata effettuata impiegando un nuovo tipo di materiale sulla cui qualità il responsabile della produzione avanza seri dubbi. Prima di mettere in vendita le lampadine prodotte desidera pertanto verificare se possa avere influito sulla durata delle lampadine. Esamina un campione di 100 lampadine, su cui misura la durata media, che risulta pari a 1955 ore. E' possibile affermare, con significatività $\alpha = 0.05$, che tale riduzione sia imputabile alla scarsa qualità del materiale utilizzato?

① **Fissare le ipotesi**

$H_0 : \mu = 2000$

$H_1 : \mu < 2000$

② **Fissare α**

$\alpha = 0{,}05$

③ **Determinare T_n**

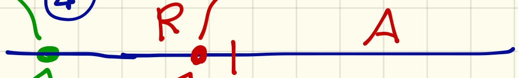
$\bar{X}_n \longrightarrow N\left(\mu_0 , \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\mu_0 = 2000$

$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{250^2}{100}$

anche in questo si rifiuta H_0 ma con un p-value più basso

④



? p-value associato a questo valore

$z = -1{,}645$

$x = 1958{,}9$

④ $\bar{x}_n = 1955$

Supponiamo anche di avere osservato un ulteriore campione : $\bar{x}_n = 1930$

p-value = P(statistica assuma valori più estremi di quello osservato) =

campione

$= P(\bar{X}_n < 1955) = P\left(Z < \frac{1955 - 2000}{\frac{250}{10}}\right) = P(Z < -1{,}8) =$

$= P(Z > +1{,}8) = 1 - P(Z < +1{,}8) = 1 - 0{,}9641 = 0{,}0359$

p-value campione 2 $= P\left(\underset{\text{sotto } H_0}{\bar{X}_n} < 1930\right) = P\left(Z < \frac{1930 - 2000}{250/10}\right) =$

$\bar{x}_n = 1930$

$= P(Z < -2{,}8) = P(Z > +2{,}8) =$

$= 1 - P(Z < +2{,}8) = 1 - 0{,}9974 =$

$= 0{,}0026$

Regola $\rightarrow$ se il p-value è più basso di α rifiuto (significa che la statistica cade in R)

può essere interpretato come il più basso livello di significatività che condurrebbe al rifiuto di H_0 sulla base del campione disponibile

NOTA BENE: nel caso di un test bidirezionale il valore di probabilità ottenuto va moltiplicato per 2 per tenere conto di entrambe le code della distribuzione

NOTA: è possibile calcolare il p-value usando le tavole solo nel caso di statistiche test la cui distribuzione campionaria segue o è approssimata da una legge normale

Negli altri casi è necessario utilizzare un software

ESERCIZIO (test sul confronto tra due proporzioni)

Un gruppo di tutela di consumatori vuole determinare se esiste una differenza tra le proporzioni di autovetture di due case automobilistiche che richiedono interventi in garanzia (per danni superiori ai 500 €) entro due anni dalla data di acquisto.

L'associazione contatta 500 proprietari di autovetture del primo modello e 400 proprietari di autovetture del secondo modello, riscontrando che 53 e 78 sono rispettivamente i casi che hanno richiesto l'intervento in garanzia. Usare un livello $\alpha = 0,10$ e determinare il p-value.

PASSO 0 $\rightsquigarrow$ individuare dati ed obiettivo del test

$X \sim Ber(\pi_x)$ $\qquad$ $Y \sim Ber(\pi_Y)$ $\qquad$ DATI POPOLAZIONE

$n_x = 400$ $\qquad$ $n_Y = 500$ $\qquad$ DATI CAMPIONARI

$\hat{\pi}_x = \frac{53}{400} = 0{,}1325$ $\qquad$ $\hat{\pi}_Y = \frac{78}{500} = 0{,}1560$

$\alpha = 0{,}10$ $\qquad$ ALTRI DATI ED OBIETTIVO

Verificare se $\pi_x = \pi_Y$ oppure se $\pi_x \neq \pi_Y$

① $H_0: \pi_x = \pi_y$

$H_1: \pi_x \neq \pi_y$

② $\alpha = 0{,}10$

③ $$T_n = \frac{\hat{\pi}_x - \hat{\pi}_y}{\sqrt{\hat{\pi}_p(1-\hat{\pi}_p)\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)}} \longrightarrow N(0,1)$$

④ R | A | R

$-z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad +z_{\frac{\alpha}{2}}$

$-1{,}645$ $\quad +1{,}645$

⑤ $$\hat{\pi}_p = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n_x + n_y} = \frac{53+78}{400+500} = 0{,}1456$$

$$T_n = \frac{0{,}1325 - 0{,}1560}{\sqrt{0{,}1456(1-0{,}1456)\left(\frac{1}{400}+\frac{1}{500}\right)}} = \frac{-0{,}0235}{0{,}0237} = -0{,}99 \in A$$

non rifiuto H_0

$$p\text{-value} = P(Z < -0{,}99) \times \underbrace{2}_{\text{test bidirezionale}} = [1 - P(Z < +0{,}99)] = 0{,}1611 \times 2$$

$$= 0{,}3222$$

PROCEDURA VERIFICA IPOTESI

ipotesi su un parametro θ $\rightsquigarrow$ si suppone di conoscere

$\downarrow$ H_0

si utilizza l'evidenza campionaria per valutare se H_0 possa essere ritenuta o meno valida

$\downarrow$

si considera una statistica T_n per θ e si partiziona lo spazio dei possibili valori di T_n in due zone

Regola di decisione test bidirezionale (due code)

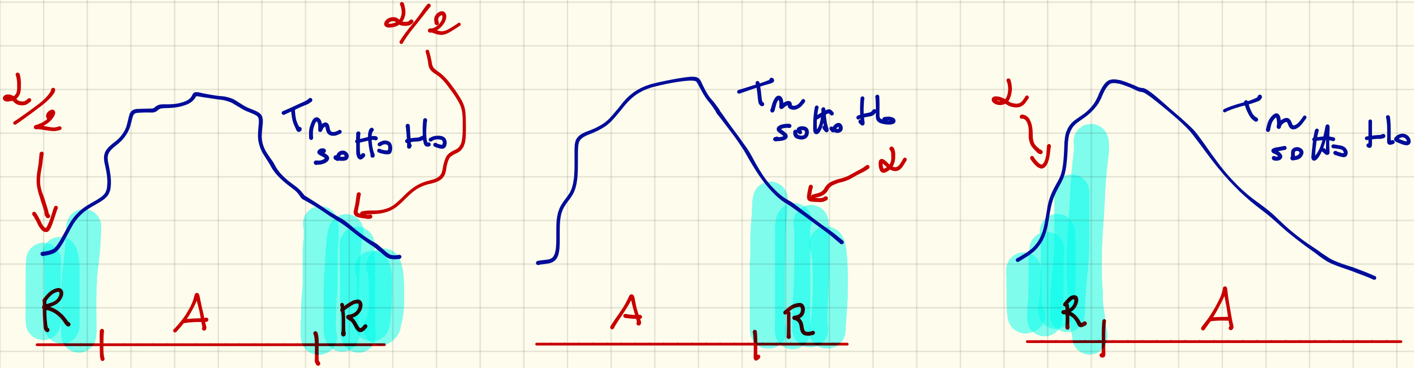
$\downarrow$

$H_1 : \theta \neq \underset{\text{sotto } H_0}{\text{valore}} \; (\theta_0)$

Regola di decisione test unidirezionali (a 1 coda)

$H_1 : \theta > \theta_0$

$H_1 : \theta < \theta_0$



$$\alpha = P(T_n \in R \mid H_0) = P(\text{errore I tipo})$$

individuare la regola di decisione equivale pertanto ad individuare due percentili della distribuzione campionaria nel caso di test bidirezionali o un percentile nel caso di test unidirezionali

PASSI DI UNA PROCEDURA DI VERIFICA DI IPOTESI

$\boxed{0}$ individuare i dati del problema

- θ $(\mu, \sigma^2, \pi, \mu_1-\mu_2, \sigma_1^2/\sigma_2^2, \pi_1-\pi_2, \ldots)$
- dati popolazione (normalità, eventuali altre informazioni)
- dati campione
- tipo di ipotesi alternativa richiesta

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

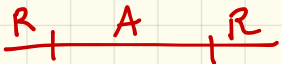
$$H_1 : \theta \neq \theta_0 \quad (<, >)$$

① Fissare il sistema di ipotesi

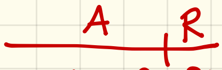
② Fissare α

③ Individuare T_n (statistica e corrispondente distribuzione campionaria)

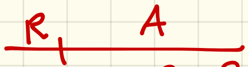
④ Regola di decisione



$H_1 : \theta \neq \theta_0$



$H_1 : \theta > \theta_0$



$H_1 : \theta < \theta_0$

⑤ Esperimento campionario e conseguente decisione

VARI TIPI DI TEST (e corrispondenti statistiche test)

① $X \sim N(\mu_0, \sigma^2 \text{ nota}) \rightsquigarrow T_n = \dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

② $X \sim N(\mu_0, \sigma^2 \text{ incognita}) \rightsquigarrow T_n = \dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

parametro di disturbo

③ $X \sim N(\mu, \sigma_0^2) \rightsquigarrow T_n = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

parametro di disturbo

NOTA: se $X \not\sim N$ i casi ① e ② possono essere risolti allo stesso modo se $n \to \infty$ sfruttando il TLC

④ $X \sim Ber(\pi_0) \longrightarrow T_n = \hat{\pi} = \bar{z}_n = \bar{X}_n$

↳ distribuzione esatta legata alla distribuzione binomiale

se $n \to \infty$, allora sfruttiamo la convergenza alla normale

$$T_n = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

⑤ $X \sim N(\mu_X^\circ, \sigma_X^2)$

$Y \sim N(\mu_Y^\circ, \sigma_Y^2)$

(X e Y indipendenti)

$\boxed{5A}$ σ_X^2 e σ_Y^2 note

$$T_n = \frac{(\bar{x}_n - \bar{y}_n) - (\mu_X^\circ - \mu_Y^\circ)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

sebbene sia possibile verificare la presenza di qualsiasi differenza tra μ_X e μ_Y, di solito l'ipotesi nulla in questo tipo di test è:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \implies \underbrace{\mu_X - \mu_Y = 0}$$

$$T_n = \frac{(\bar{x}_n - \bar{y}_n) - \overbrace{\cancel{(\mu_X^\circ - \mu_Y^\circ)}}^{=0}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

⑤ $X \sim N(\mu_X^0, \sigma_X^2)$

$Y \sim N(\mu_Y^0, \sigma_Y^2)$

$\boxed{5B}$ σ_X^2 e σ_Y^2 incognite ma supposte uguali

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$$

$$T_n = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - \overbrace{(\mu_X - \mu_Y)}^{\text{solitamente } = 0 \text{ sotto } H_0}}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y} \right)}}$$

[stimatore congiunto (pooled) della varianza]

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1) S_X^2 + (n_Y - 1) S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} =$$

$$= \frac{Dev(X) + Dev(Y)}{n_X + n_Y - 2}$$

⑥ $X \sim N(\mu_X, \boxed{\sigma_X^2})$

$Y \sim N(\mu_Y, \boxed{\sigma_Y^2})$

oggetto della procedura di inferenza

parametri di disturbo

$$T_n = \frac{S_X^2 / \sigma_X^2 \text{ sotto } H_0}{S_Y^2 / \sigma_Y^2 \text{ sotto } H_0} \sim F_{n_X - 1, n_Y - 1}$$

di solito in questo caso H_0 è del tipo:

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$$

per cui T_n si riduce a:

$$T_n = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{n_X - 1, n_Y - 1}$$

⑦ $X \sim Ber(\pi_X)$
$Y \sim Ber(\pi_Y)$

anche in questo caso la distribuzione esatta dello stimatore $\hat{\pi}_X - \hat{\pi}_Y$ può essere ricavata sfruttando la distribuzione binomiale

per comodità, quando i campioni sono sufficientemente grandi, si può sfruttare la convergenza alla normale (TLC)

$$T_n = \frac{(\hat{\pi}_X - \hat{\pi}_Y) - \overbrace{(\pi_X^0 - \pi_Y^0)}^{\text{sotto } H_0 \text{ di solito } = 0}}{\sqrt{\hat{\pi}_p (1 - \hat{\pi}_p) \left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y} \right)}}$$

stimatore congiunto (pooled)

$$\hat{\pi}_p = \frac{\sum X_i + \sum Y_i}{n_X + n_Y} = \frac{n_X \hat{\pi}_X + n_Y \hat{\pi}_Y}{n_X + n_Y}$$

Riporto di seguito tre esempi di test a due campioni:

~ confronto tra medie (varianze note e varianze incognite)

~ confronto tra proporzioni

~ confronto tra varianze

ESERCIZIO (test sul confronto tra le medie di due popolazioni)

Un automobilista decide di cambiare gli pneumatici della propria automobile, potendo scegliere tra due diverse marche X e Y, di uguale prezzo e per i quali le case costruttici garantiscono una durata media di 35'000 Km e una deviazione standard di 2000 Km, uguale per le due marche.

Prima di procedere all'acquisto, l'automobilista decide di verificare se gli pneumatici delle due marche possano essere considerati equivalenti in termini di durata. Si informa quindi presso amici e conoscenti che utilizzano i due tipi di pneumatici, trovando 14 persone che utilizzano la marca X e 9 persone che utilizzano la marca Y, da cui risulta $\bar{x}_n = 33500$ e $\bar{y}_m = 36'000$. Supponendo che la durata dei due pneumatici si distribuisca come una normale, verificare se la durata possa essere ritenuta equivalente, usando un livello di significatività $\alpha = 0.05$.

Inferenza caso due popolazioni

$X \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$ $\quad$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2_Y)$ $\quad$ DATI POPOLAZIONE

μ_X: 35'000 Km $\quad$ σ^2_X: 2000^2 Km $\quad$ μ_Y: 35'000 Km $\quad$ σ^2_Y: $20'000^2$ Km

---

$n_X = 14$ $\quad$ $n_Y = 9$ $\quad$ DATI CAMPIONARI

$\bar{x} = 33500$ $\quad$ $\bar{y} = 36000$

$\alpha = 0$ $\quad$ ALTRI DATI ED OBIETTIVO

Verificare se le due popolazioni hanno la stessa media o media differente

$\to$ H_1 di tipo bidirezionale

① $H_0: \mu_X = \mu_Y \rightarrow \mu_X - \mu_Y = 0$

② $\alpha = 0{,}05$

$H_1: \mu_X \neq \mu_Y \rightarrow \mu_X - \mu_Y \neq 0$

③

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } X \sim N \\ \text{e } Y \sim N \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{X} \sim N \\ \bar{Y} \sim N \end{array}\right] \Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_n \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n_X}\right) \\ \bar{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right) \end{array}\right] \Rightarrow \bar{X}_n - \bar{Y}_n \sim N\Big(\mu_X - \mu_Y, \underbrace{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}_{\text{assumendo che } X \text{ e } Y \text{ siano indipendenti}}\Big)$$

altrimenti abbiamo considerare il termine legato a $cov(X, Y)$

(4)

R | A | R

$-z_{\frac{\alpha}{2}} = -1{,}96$ $\qquad$ $+z_{\frac{\alpha}{2}} = +1{,}96$

(5)

se testo $\mu_x - \mu_y = 0$ questo termine è $= 0$ sotto H_0

$$T_n = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} = \frac{33500 - 36000}{\sqrt{\frac{20000}{14} + \frac{20000}{9}}} = -2{,}93$$

appartiene ad R

rifiuto H_0

ESERCIZIO (test sul confronto tra due medie - 2)

Una scuola superiore vuole determinare se due docenti hanno le stesse capacità di preparare gli studenti per un esame statale di geometria.
70 studenti che hanno seguito in questo semestre il corso di geometria sono stati suddivisi casualmente in due gruppi da 35. Il docente 1 insegna geometria al primo gruppo, e il docente 2 al secondo. Alla fine del semestre gli studenti hanno sostenuto l'esame con i seguenti risultati:

Classe del docente 1	Classe del docente 2
$\bar{x} = 72,6$	$\bar{y} = 74,0$
$s_X^2 = 6,6$	$s_Y^2 = 6,2$

Possiamo concludere da questi risultati che i docenti non abbiano le stesse capacità nel preparare gli studenti agli esami?

DATI POPOLAZIONE

non abbiamo informazioni circa la distribuzione delle due popolazioni né sulle due varianze

$\hookrightarrow$ per procedere ipotizziamo che $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

DATI CAMPIONE

$n_X = 35$ $\quad$ $n_Y = 35$

$\bar{x} = 72.6$ $\quad$ $\bar{y} = 74.0$

$s_X^2 = 6.6$ $\quad$ $s_Y^2 = 6.2$

ipotesi alternativa bidirezionale

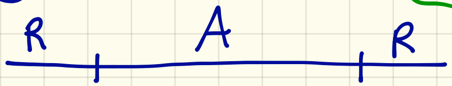
① $H_0: \mu_x = \mu_y$

$H_1: \mu_x \neq \mu_y$

② $\alpha = 0{,}05$

③ $$T_n = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n - \overbrace{\cancel{(\mu_x - \mu_y)}}^{=0 \text{ sotto } H_0}}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \sim t_{n_x + n_y - 2}$$

④



$-t_{68;0{,}025}$ $\quad$ $+t_{68;0.025}$

$-2{,}902$ $\quad$ $+2{,}902$

④ $$s_p^2 = \frac{34 \times 6{,}6 + 34 \times 6{,}2}{68} = 6{,}4$$

$$T_n = \frac{72{,}6 - 74}{\sqrt{6{,}4\left(\frac{1}{35} + \frac{1}{35}\right)}} = -2{,}3 \in A$$

non si rifiuta H_0

ESERCIZIO (test sul confronto tra due proporzioni)

Un gruppo di tutela di consumatori vuole determinare se esiste una differenza tra le proporzioni di autovetture di due case automobilistiche che richiedono interventi in garanzia (per danni superiori ai 500 €) entro due anni dalla data di acquisto.

L'associazione contatta 500 proprietari di autovetture del primo modello e 400 proprietari di autovetture del secondo modello, riscontrando che 53 e 78 sono rispettivamente i casi che hanno richiesto l'intervento in garanzia. Usare un livello $\alpha = 0,10$ per verificare l'ipotesi richiesta

PASSO 0 $\leadsto$ individuare dati ed obiettivo del test

$X \sim Ber(\pi_x)$ $\qquad$ $Y \sim Ber(\pi_y)$ $\qquad$ DATI POPOLAZIONE

$n_x = 400$ $\qquad$ $n_y = 500$ $\qquad$ DATI CAMPIONARI

$\hat{\pi}_x = \frac{53}{400} = 0,1325$ $\qquad$ $\hat{\pi}_y = \frac{78}{500} = 0,1560$

$\alpha = 0,10$ $\qquad$ ALTRI DATI ED OBIETTIVO

Verificare se $\pi_x = \pi_y$ oppure se $\pi_x \neq \pi_y$

(1) $H_0 : \pi_x = \pi_y$

$H_1 : \pi_x \neq \pi_y$

(2) $\alpha = 0,10$

(3) $$T_n = \frac{\hat{\pi}_x - \hat{\pi}_y}{\sqrt{\hat{\pi}_p(1-\hat{\pi}_p)\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)}} \longrightarrow N(0,1)$$

(4) R | A | R

$-z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad$ $+z_{\frac{\alpha}{2}}$

$-1,645$ $\quad$ $+1,645$

(5) $$\hat{\pi}_p = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n_x + n_y} = \frac{53+78}{400+500} = 0,1456 \left(= \frac{400 \times 0,1325 + 500 \times 0,1560}{400+500} \right)$$

$$T_n = \frac{0,1325 - 0,1560}{\sqrt{0,1456(1-0,1456)\left(\frac{1}{400}+\frac{1}{500}\right)}} = \frac{-0,0235}{0,0237} = -0,99 \in A$$

non rifiuto H_0

① $H_0 : \pi_X = \pi_Y$

$H_1 : \pi_X \neq \pi_Y$

② $\alpha = 0{,}10$

③ $$T_n = \frac{\hat{\pi}_X - \hat{\pi}_Y}{\sqrt{\hat{\pi}_p (1-\hat{\pi}_p)\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)}} \longrightarrow N(0,1)$$

④ R | A | R

$-z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad$ $+z_{\frac{\alpha}{2}}$

$-1{,}645$ $\qquad$ $+1{,}645$

⑤ $$\hat{\pi}_p = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n_X + n_Y} = \frac{53+78}{400+500} = 0{,}1456$$

$$T_n = \frac{0{,}1325 - 0{,}1560}{\sqrt{0{,}1456\,(1-0{,}1456)\left(\frac{1}{400} + \frac{1}{500}\right)}} = \frac{-0{,}0235}{0{,}0237} = -0{,}99 \in A$$

non rifiuto H_0

$$p\text{-value} = P(Z < -0{,}99) \times \underbrace{2}_{\text{test bidirezionale}} = [1 - P(Z < +0{,}99)] = 0{,}1611 \times 2$$

$$= 0{,}3222$$

ESERCIZIO (test sul confronto tra varianze)

La teoria economica ipotizza che le vendite complessive siano più variabili quando un'azienda opera su un mercato più competitivo rispetto a quando opera in un duopolio o su un mercato dove si siano accordi di cartello. In uno studio sull'industria dei cantieri navali, si è rilevato che, in quattro anni di presenza su un mercato competitivo, la varianza delle vendite complessive della società A è stata 114,09. Nei successivi sette anni, essenzialmente di duopolio, la varianza è stata 16,08. Usando un livello di significatività $\alpha = 0{,}05$, verificare l'assunto della teoria economica.

$\sigma_C^2 \rightarrow$ varianza caso mercato competitivo

$\sigma_D^2 \rightarrow$ varianza caso mercato duopolio

① $H_0: \dfrac{\sigma_C^2}{\sigma_D^2} = 1 \rightarrow \boxed{\sigma_C^2 = \sigma_D^2}$

$H_1: \dfrac{\sigma_C^2}{\sigma_D^2} > 1 \rightarrow \boxed{\sigma_C^2 > \sigma_D^2}$

NOTA: l'ipotesi alternativa può essere anche $<$ oppure $\neq$

② $\alpha = 0.05$

③ $T_n = \dfrac{s_C^2}{s_D^2} \overset{H_0}{\sim} F_{\underbrace{n_C - 1}_{\text{gdl numeratore}},\ \underbrace{n_D - 1}_{\text{gdl denominatore}}}$

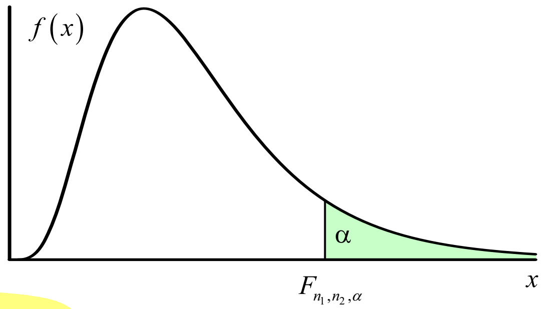
$n_C = 4$, $n_D = 7$

F di Fisher

La F di Fisher è sostanzialmente il rapporto tra due χ^2/gdl

NOTA: è necessario assumere che le due popolazioni si distribuiscano normalmente

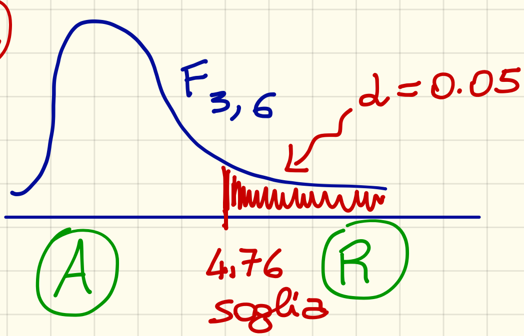
Tavola 4 – Percentili della variabile casuale F di Fisher



$\alpha = 0.05$

Denom n_2	**Numeratore** n_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
1	161.	199.	215.	224.	230.	234.	236.	238.	240.	241.	243.	246.	248.	249.	250.	251.	252.	253.	254.
2	18.5	19.0	19.1	19.2	19.3	19.3	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

4



5

$$T_n = \frac{114,09}{16,08} = 7,09 \in R$$

rifiuto H_0

$\Downarrow$

risultato coerente con la teoria economica

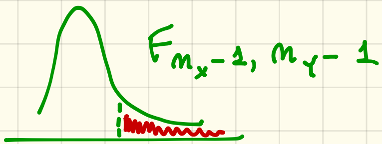
NOTE

- nel costruire la statistica test:

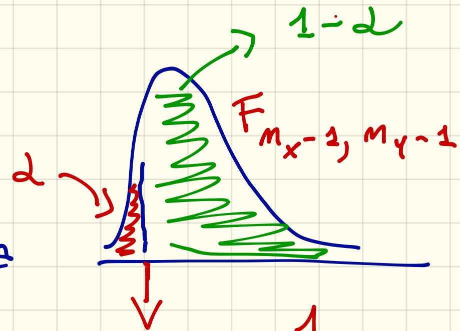
$$T_n = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

conviene utilizzare al numeratore il più alto tra S_X^2 e S_Y^2

- proprietà F di Fisher



se sono interessato a



$$F_{n_X-1,\, n_Y-1;\, 1-\alpha} = \frac{1}{F_{n_Y-1,\, n_X-1;\, \alpha}}$$

NOTA: errore tipico (grave) sui test

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad \cancel{H_0 : T_n = \theta_0}$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_1 \qquad \cancel{H_1 : T_n \neq \theta_1}$$

OK

Esempio:

$$H_0 : \mu = 2000 \qquad \cancel{H_0 : \bar{x}_n = 2000}$$

$$H_1 : \mu \neq 2000 \qquad \cancel{H_1 : \bar{x}_n \neq 2000}$$

La decisione è sullo spazio parametrico (le ipotesi sono sui parametri e non sulle statistiche)

	Task Description	Due Date	Status
☐	Errore di II tipo e potenza del test		
☐	Andamento della funzione potenza del test per i differenti tipi di ipotesi alternativa		
☐	ARGOMENTO AGGIUNTIVO		
☐	[Relazione tra intervalli di confidenza e test di ipotesi]		
☐	Test di indipendenza del χ^2		
☐	Test di adattamento del χ^2		
☐			
☐			
☐			
☐			

ESERCIZIO: errore di II tipo e potenza del test

La durata delle lampadine prodotte da una certa azienda ha media pari a 2000 ore e deviazione standard pari a 250 ore.

Viene proposta alla direzione una nuova macchina che, secondo i produttori, è in grado di ottimizzare il processo con un guadagno, in termini di efficienza del prodotto, quantificabile in un miglioramento di performance del 3.5%.

Prima di decidere se procedere o meno all'acquisto, si decide di considerare un campione casuale di 100 lampadine prodotte usando il nuovo macchinario.

Si calcoli la probabilità β dell'errore di II tipo e la potenza del test, nel caso in cui si è disposti ad accettare $\alpha = 0.01$.

0 DATI POPOLAZIONE

$X \sim f(\underbrace{\mu_0 = 2000}_{H_0}, \sigma^2 = 250^2)$

?

popolazione

$H_1 \rightsquigarrow$ quanto il produttore dichiara (miglioramento del 3,5%)

$\rightarrow 2000 + 2000 \times 3.5\% = \boxed{2070}$ H_1

Per calcolare $\beta = P(T_n \in A \mid H_1)$ mi serve determinare la regola di decisione (mi serve sapere A)

1. $H_0: \mu = 2000$
   $H_1: \mu = 2070$

2. $\alpha = 0.01$

3. $\bar{X}_n \rightarrow N\left(\mu_0 = 2000, \sigma^2 = \frac{250^2}{100}\right)$

4

A R

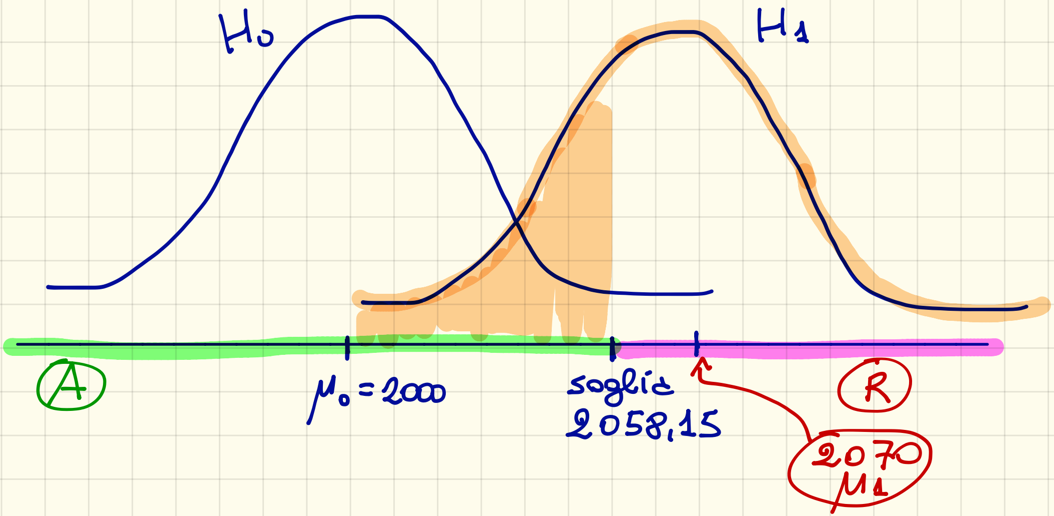
z

soglia

$z_\alpha = +2{,}326$ soglia scala standardizzata

$x_\alpha = 2000 + 2{,}326 \times \frac{250}{10} = 2058{,}15$ soglia scala originaria

per calcolare β è necessaria determinare la soglia sulla scala originaria



$$\beta = P(T_n \in A \mid H_1) = P(\bar{X}_n \leq 2058{,}15 \mid H_1) =$$

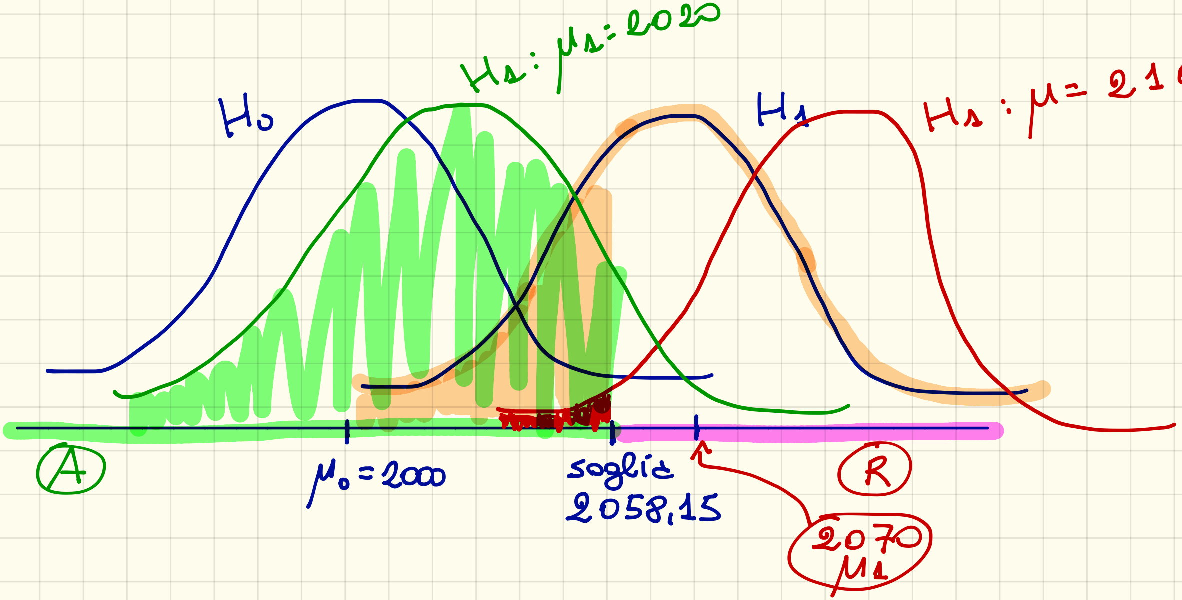
$$\bar{X}_n \rightarrow N\left(2070, \frac{250^2}{100}\right)$$

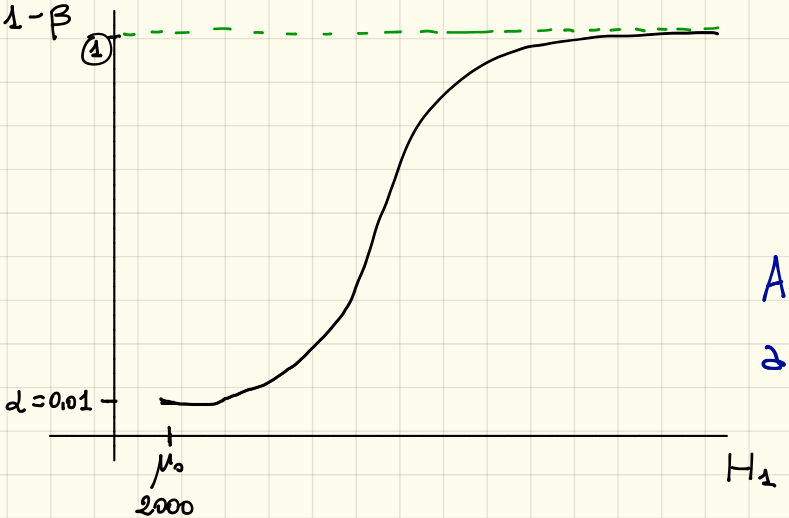
$$= P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{2058{,}15 - 2070}{250/10}\right) = P(Z \leq -0{,}474) =$$

$$= P(Z > +0{,}474) = 1 - P(Z < +0{,}474) = 1 - 0{,}6808 = 0{,}3192$$

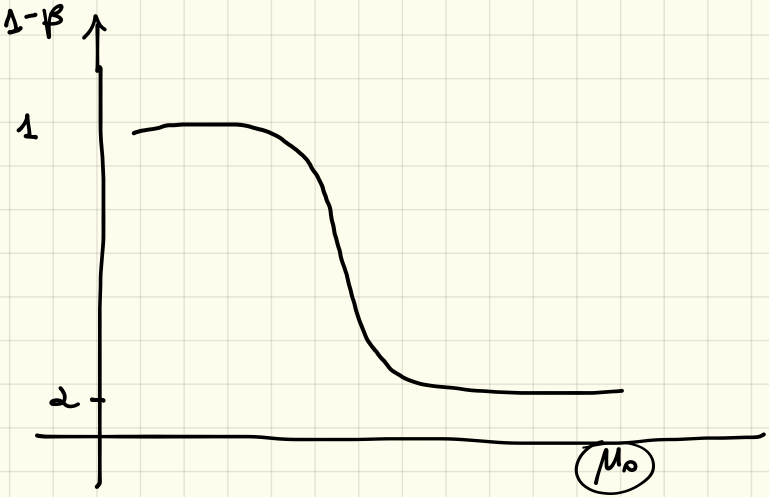
$\underbrace{\beta = 0{,}3192}$ prob errore II tipo quando $H_1: \mu = 2070$

$1 - \beta = 0{,}6808$ potenza test

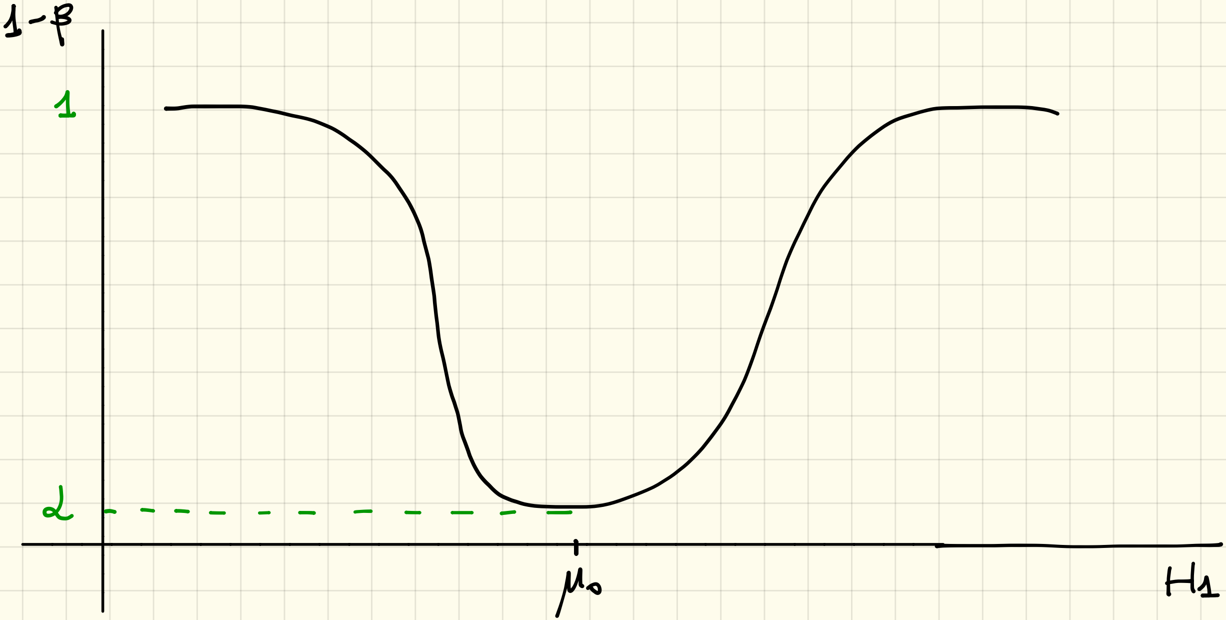




Andamento potenza ipotesi alternativa unidirezionale dx



Andamento funzione di potenza caso ipotesi unidirezionale sx



Andamento della funzione di potenza per ipotesi bidirezionali

RELAZIONE TRA INTERVALLI DI CONFIDENZA E TEST

intervalli bidirezionali $\longleftrightarrow$ test bidirezionali

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\begin{matrix}\text{limite} \\ \text{inferiore}\end{matrix} ; \begin{matrix}\text{limite} \\ \text{superiore}\end{matrix}\right] \qquad \begin{matrix} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 \end{matrix}$$

intervalli unidirezionali $\longleftrightarrow$ test unidirezionali

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[-\infty, \begin{matrix}\text{limite} \\ \text{superiore}\end{matrix}\right] \quad — \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\begin{matrix}\text{limite} \\ \text{inferiore}\end{matrix}, +\infty\right] \qquad H_1 : \theta < \theta_0$$

NON SI RIFIUTA H_0 PER QUALSIASI VALORE DI $\theta_0 \in IC_{1-\alpha}(\theta)$

$$IC(\mu) = [980, 1000]$$

ESERCIZIO (test di indipendenza)

Un'agenzia di viaggi seleziona un campione casuale tra i suoi potenziali clienti per sapere se ci sia un'associazione tra il sesso degli intervistati e il metodo usato per effettuare la prenotazione. I dati sono riportati nella seguente tabella:

	Donne	Uomini	
Agenzia viaggi	256	74	330
Internet	41	42	83
N. verde compagnia	66	34	100
	363	150	513

Sapendo che il χ^2 risulta pari a 26,8, verificare l'ipotesi di indipendenza.

(1) H_0 : indipendenza tra i due caratteri $\rightsquigarrow \chi^2_{POP} = 0 \rightsquigarrow$ TEORICO POPOLAZ

H_1 : interdipendenza tra i due caratteri $\rightsquigarrow \chi^2_{POP} > 0$

$\Downarrow$

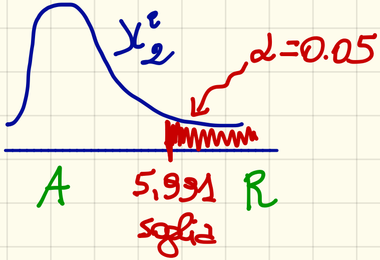
test unidirezionale destro

(2) $\alpha = 0,05$

(3) $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}} \sim \chi^2_{(R-1)\times(C-1)}$$

$R = 3$, $C = 2$ $\rightarrow \chi^2_{2\times 1 = 2}$

(4)



(5) $\chi^2_{obs} = 26.8 \in R \rightarrow$ rifiuto l'ipotesi di indipendenza

NOTA

Il test del χ^2 può essere utilizzato anche per verificare l'adattamento di una distribuzione osservata ad una distribuzione teorica!

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2_{k-1}$$

n° di modalità

freq. teoriche sotto il modello di cui si vuole verificare l'adattamento

freq. osservate

ESEMPIO: lancio di un dado per 600 volte

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	90	85	105	110	102	108

$\hat{n}_i = 100 \, f_i$

ESERCIZIO (test sulla bontà di adattamento)

In un campione di 262 blocchi di testo (ognuno lungo 200 parole) dai principali quotidiani nazionali, il n. medio di ripetizioni della parola "governo" è stato di 0,66. La seguente tabella riporta le frequenze osservate nei 262 blocchi di testo:

n° ripetizioni	0	1	2	3 o più
frequenze osservate	156	63	29	14

Verificare se le ripetizioni della parola "governo" seguano una distribuzione di Poisson.

→ NOTA: non è fornito il parametro λ

$\hat{\lambda} = \bar{x}_n = 0{,}66$ n° medio di ripetizioni nel campione

stima di λ

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

n° ripetizioni	0	1	2	3 o più
frequenze osservate	156	63	29	14
frequenze teoriche	135,4	89,4	29,5	7,7

$P(X=0) = e^{-0{,}66} = 0{,}5169$

$n\,P(X=0) = 262 \times 0{,}5169 = 135{,}4$

la probabilità usata per calcolare questa frequenza va calcolata come: $1 - \sum_{x=0}^{2} P(X=x)$

frequenze attese sotto H_0

1. H_0: i dati seguono una distribuzione di Poisson ($\lambda = 0,66$)

   H_1: i dati non seguono una distribuzione di Poisson ($\lambda = 0,66$)

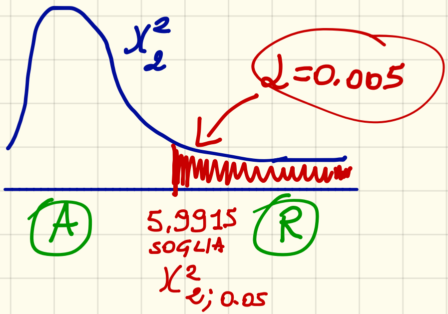
2. $\alpha = 0.05$

3. $$T_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2_{k-m-1}$$

   k → 4

   m → parametri incogniti della distribuzione rispetto a cui si vuole studiare l'adattamento

   NOTA: se la distribuzione teorica è completamente specificata $m = 0$

4. 

5. $\chi^2_{obs} = 16,0931 \in R$ → si rifiuta l'ipotesi nulla di distribuzione di Poisson con $\lambda = 0,66$